Листок №5

О полях и целых числах

Пусть K/F — конечное сепарабельное расширение степени n, $\sigma_i : K \longrightarrow \overline{F}$, $i = 1, \ldots, n$ — вложения K над F в поле $\overline{F}$ (алгебраическое замыкание поля F). Рассмотрим отображение $\varphi : K \longrightarrow \overline{F}^n$ вида $\varphi(\alpha) = (\alpha^{\sigma_1}, \ldots, \alpha^{\sigma_n})$, $\alpha \in K$. Тогда все строки такого вида образуют в $\overline{F}^n$ подпространство (над F), изоморфное K над F.

1. Доказать, что форма $\mathrm{tr}_{K/F}(xy)$ невырождена на поле K.

2. Доказать, что след и норма целого алгебраического числа есть целое число.

3. Описать кольцо целых O_K поля $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-m}\,)$, m – натуральное число, свободное от квадратов.

Определитель формы $\mathrm{tr}_{K/\mathbb{Q}}(xy)$ на решетке целых $O_K < K$ поля алгебраических чисел K называется *дискриминантом поля* K и обозначается $D(K)$.

4. Вычислить $D\left(\mathbb{Q}(\sqrt{-m}\,)\right)$, $D\left(\mathbb{Q}(\sqrt[5]{1})\right)$.

5. Описать группу O_K^* обратимых элементов кольца O_K, где $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$; $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$; $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$.

Пусть G — группа, E — поле, $E^* = E - \{0\}$ — мультипликативная группа поля. Гомоморфизм $\chi : G \longrightarrow E^*$ называется *характером группы G со значением в поле E*.

6. Доказать лемму Артина: различные характеры $\chi_1, \ldots, \chi_t$ группы G линейно независимы над E (т.е. никакая их нетривиальная линейная комбинация с коэффициентами из E не равна тождественно нулю на группе G).

7. Пусть $J \subseteq O_K$ — идеал в кольце целых алгебраических чисел. Доказать, что J является свободной абелевой группой ранга $[K : \mathbb{Q}]$.

Нётеровость. Алгебра целых расширений. Градуированные кольца

Пусть A — кольцо без делителей нуля, $R(A)$ — поле частных кольца A, L — конечное сепарабельное расширение поля $R(A)$. Элементы L, целые над A, образуют кольцо $S > A$, которое называется *целым замыканием A в L*.

8. Доказать, что целое замыкание кольца S в L совпадает с S.

9. Доказать, что кольцо $C[0, 1]$ не является нётеровым.

Кольцо A называется *градуированным*, если оно содежит такую коллекцию аддитивных подгрупп A_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, что

а) $A = \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} A_i$

б) $A_p A_q \subset A_{p+q}$

A_p называется *однородной градуированной компонентой степени* p.

Замечание. A_0 – подкольцо, а A_p – A_0-модуль.

10. Всегда ли $A = A_0[A_1]$?

11. Придумайте определение градуированного модуля M над градуированным кольцом A.

12. Укажите как можно больше различных градуировок кольца $k[X, Y]$ многочленов от двух переменных.

13. Пусть $A^{(q)} = \bigoplus\limits_{m=0}^{\infty} A_{mq}$. Доказать, что если A конечно порождено над A_0, то и $A^{(q)}$ конечно порождено над A_0.

14. Пусть $k[X, Y]$ – кольцо многочленов с естественной градуировкой ($A_p = \{$мономы степени $p\}$). Верно ли, что $A = k[X, Y]$ конечно над $k[X^2, Y^2]$? над $A^{(q)}$?

15. Пусть $A_+ = \bigoplus\limits_{p>0} A_p$. Доказать, что а) A_+ – идеал; б) если A_0 – поле, то идеал A_+ максимален (есть ли в A другие максимальные идеалы?).

в) Пусть A_+ – конечный A-модуль с образующими $a_1, \ldots, a_r$. Тогда $A = A_0[a_1, \ldots, a_r]$.

16. Пусть G – конечная группа автоморфизмов кольца $A = k[X, Y]$ (k – поле). Верно ли, что $R(A)^G = R(A^G)$? (Через $R(A)$ обозначается поле частных кольца A.)