Листок №6

Ящик с инструментами-2: локализация и пополнение

Локализация

Пусть A — кольцо без делителей нуля, $S < A$ — полугруппа (по умножению) с единицей, лежащая в A.

Определение. Обозначим через $\dfrac{A}{S}$ множество классов эквивалентных дробей $\left\{\dfrac{a}{s}\right\}$, $a \in A, \quad s \in S$. Положив

$$\left\{\frac{a}{s}\right\} + \left\{\frac{a'}{s'}\right\} = \left\{\frac{as' + a's}{ss'}\right\}, \quad \left\{\frac{a}{s}\right\} \cdot \left\{\frac{a'}{s'}\right\} = \left\{\frac{aa'}{ss'}\right\},$$

введем в $\dfrac{A}{S}$ структуру кольца (проверьте это самым тщательным образом; напомним, что $\dfrac{a}{s} \sim \dfrac{a'}{s'} \Leftrightarrow as' = a's$). Построенное кольцо называется *локализацией* $\dfrac{A}{S}$ *кольца* A *относительно мультипликативной полугруппы* S. Гомоморфизм $a \mapsto \left\{\dfrac{a}{1}\right\}$ называется *локализирующим гомоморфизмом.*

1. Если идеал $P < A$ прост, то $S = A - P$ — полугруппа. В этом случае обозначим $\dfrac{A}{S}$ через $A_{(P)}$. Доказать, что

- **а)** в кольце $A_{(P)}$ все необратимые элементы образуют единственный максимальный идеал $PA_{(P)}$ (такое кольцо называется *локальным*);
- **б)** $A_{(0)}$ совпадает с полем частных $R(A)$ кольца A;
- **в)** $R\left(\dfrac{A}{S}\right) = R(A)$.

Пусть ℓ — некоторое множество простых чисел и S_ℓ — полугруппа в $\mathbb{Z}$, порожденная всеми простыми числами, не входящими в ℓ. Положим $\mathbb{Z}_\ell = \dfrac{Z}{S_\ell}$.

2. Доказать, что кольцами вида $\mathbb{Z}_\ell$ исчерпываются все подкольца (с единицей) поля $\mathbb{Q}$.

3. Пусть O_K — кольцо целых поля алгебраических чисел K и $p \in \mathbb{Z}$ — простое число. Доказать, что $O_K \cdot \mathbb{Z}_{\{p\}}$ является целым замыканием локального кольца $\mathbb{Z}_{\{p\}}$ в K.

Пополнение

Пусть A — кольцо и $A = I_0 \geqslant I_1 \geqslant I_2 \geqslant \dots$ — убывающая последовательность его идеалов с $\bigcap\limits_{j=0}^{\infty} I_j = \{0\}$.

Введем в A "расстояние" $d(x, y) = e^{-k}, e > 1$, если $x - y \in I_k$, но $x - y \notin I_{k+1}$.

4. Доказать, что d определяет (неархимедову) метрику с сильным неравенством треугольника
$$d(x,z) \leqslant \max\left(d(x,y), d(y,z)\right)$$

Рассмотрим пополнение $\widehat{A_d}$ кольца A по метрике d.

5. Как ввести структуру кольца в $\widehat{A_d}$?
Можно ли продолжить метрику d с A на $R(A)$?

6. Что дает наша конструкция в случае кольца $A = \mathbb{Z}$ и $I_j = (p^j)$, p — простое число?

7. Доказать, что топологическое кольцо $\widehat{\mathbb{Z}_p}$ компактно.

8. Доказать, что $\widehat{\mathbb{Z}_p}$ — локальное кольцо.

9. Что получится, если p-адически пополнить локализацию $\mathbb{Z}_{\{p\}}$?

10. Верно ли следующее утверждение: система линейных уравнений с целыми коэффициентами тогда и только тогда имеет целое решение, когда она имеет решение в $\widehat{\mathbb{Z}_p}$ для всех простых p?

11. Доказать, что многочлен $x^{p-1} - 1$ раскладывается над кольцом $\widehat{\mathbb{Z}_p}$ на линейные множители.

12. Пусть O — кольцо целых поля алгебраических чисел K,
P — простой идеал в O,
$\widehat{O_P}$ — P-адическое пополнение кольца O,
$\widehat{K_P}$ — поле частных кольца $\widehat{O_P}$.
Верно ли, что $[K : \mathbb{Q}] \geqslant [\widehat{K_P} : \widehat{\mathbb{Q}_p}]$, где $(p) = P \cap \mathbb{Z}$?