Листок №7

Решетки над кольцами

Все о решетках над кольцами без делителей 0 можно узнать из трактата Бурбаки *Алгебра*, §4.

Пусть A — кольцо без делителей 0, $K = R(A)$ — его поле частных, V — конечномерное векторное пространство над полем K. A-модуль $M < V$ называется A-*решеткой* (или просто *решеткой*), если

1) $K \bigotimes\limits_A M = V$ (или $KM = V$);

2) модуль M конечен над кольцом A.

Доказать, что

1. Если M_1 и M_2 — две A-решетки в V, то решетками являются M_1+M_2 и $M_1 \cap M_2$.

2. Если $W < V$ — подпространство в V, M — решетка в V, то $M \cap W$ есть решетка в W.

3. Если $f : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$ — полилинейное отображение K-векторных пространств, $M_i < V_i$ — решетка в V_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то A-модуль, порожденный $f(M_1 \times \cdots \times M_n)$, является решеткой в K-пространстве, порожденном $f(V_1 \times \cdots \times V_n)$.

4. Пусть $M < V$ и $N < W$ — две A-решетки.
Множество $\{h \in \mathrm{Hom}_K(V, W) \mid h(M) < N\}$ обозначим через $(N : M)$. Тогда

а) $(N : M)$ есть A-решетка в $\mathrm{Hom}_K(V, W)$;

б) $(N : M) \cong \ Hom_A(N, M)$ (канонически изоморфны).

5. Если S — полугруппа с единицей в $A^* = A\backslash\{0\}$ и M — некоторая решетка в V, то $\dfrac{A}{S}M$ — $\dfrac{A}{S}$-решетка в V.

В задачах 6 – 10 A — дедекиндово кольцо.

Дедекиндовы кольца

6. Пусть a и b — идеалы кольца A. Если $a = \prod P_i^{a_i}$, $b = \prod P_i^{b_i}$ — их разложения на простые множители, то

$$a + b = \prod P_i^{\min(a_i, b_i)}$$
$$a \cap b = \prod P_i^{\max(a_i, b_i)}$$

7. *Нормой* $N(P)$ *простого идеала* $P < A$ назовем число элементов конечного поля A/P. Норму $N(a)$ любого идеала $a < A$, $a = \prod P_i^{a_i}$ положим равной $N(a) = \prod N(P_i)^{a_i}$. Доказать, что $N(a) = |A/a|$.

8. Доказать, что $|b/ab| = |A/a|$ для любых двух ненулевых идеалов a и b из A.

9. Доказать, что группа $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ конечного расширения Галуа $K > \mathbb{Q}$ транзитивно действует на каждом слое естественной проекции $\operatorname{Spec} O_K \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

10. Доказать, что любой идеал кольца A можно породить (как A-модуль) не более чем двумя элементами.

Праздные вопросы из ЕГЭ по алгебре

11. Существуют ли кольца без делителей нуля с конечным числом простых идеалов? Ровно с 10 простыми идеалами?
Верно ли, что такое кольцо обязательно

а) нетерово

б) главных идеалов

в) дедекиндово?

12. (*Капланский*) Рассмотрим в кольце вещественных функций на $[0, 1]$ множество функций, которые равны 0 в некоторой окрестности 0 (своей для каждой функции). Доказать, что это множество является проективным модулем над рассматриваемым кольцом функций. Будет ли этот модуль конечно порожден? Есть ли в нем кручение? Можно ли построить аналогичный пример в $C[0, 1]$?