Листок №8
Ящик с инструментами

Тензорное произведение абелевых групп

Тензорным произведением $A \otimes B$ абелевых групп A и B называется абелева группа, порожденная парами $a \otimes b$, $a \in A$, $b \in B$, которые подчинены соотношениям:

$$(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b, \quad a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2$$

(обратите внимание, что $ka \otimes b = a \otimes kb$ и $a \otimes 0 = 0 \otimes b = 0$).

1. Вычислить: а) $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m$; б) $A \otimes Z_n$.

2. Пусть A — свободная абелева группа ранга n. Тогда группа $A \otimes B$ изоморфна $B^n = \underbrace{B \oplus \cdots \oplus B}_{n}$.

3. Сформулируйте и докажите универсальность тензорного произведения.

4. Определите тензорную, симметрическую и внешнюю степени абелевой группы и объясните, как они устроены для группы а) $\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Z}_n$; в) произвольной (конечной над $\mathbb{Z}$) абелевой группы A.

Идеалы

(A — произвольное кольцо без делителей нуля.)
Целые идеалы I и J называются *взаимно простыми*, если $I + J = A$.

5. Если идеалы I и J взаимно просты, то $I \cap J = IJ$.

6. Если идеалы $\{I_k\}_{k=0}^n$ попарно взаимно просты, то $I_k + \prod\limits_{k \neq \ell} I_\ell = A$ для любого $1 \leqslant k \leqslant n$. Верно и обратное утверждение.

7. Если идеал I взаимно прост с J и W, то он взаимно прост с JW.

8. Пусть $\{I_k\}$ — коллекция попарно взаимно простых идеалов и пусть $\{a_1, \ldots, a_n\}$ — произвольные элементы кольца A. Тогда найдется такой элемент $a \in A$, что

$$a \equiv a_k \pmod{I_k}, \quad k = 1, \ldots, n$$

Элемент a определен однозначно $\mod \prod\limits_{i=1}^{n} I_\ell$.

9. Доказать, что в дедекиндовом кольце A из взаимной простоты идеалов I^2 и J^2 следует взаимная простота I и J.

10. Пусть I и J — идеалы дедекиндова кольца A. Доказать, что существует такой идеал W, взаимно простой с идеалом J, что IW — главный идеал.

ЕГЭ по алгебре

11. Разложить на простые множители в кольце $O_{\sqrt{-5}}$ идеал (9) (т.е. требуется дать точное описание простых идеалов кольца, входящих в это разложение. Например, указав их $\mathbb{Z}$-базис).

12. Доказать, что любой конечный A-модуль есть гомоморфный образ конечного свободного A-модуля.

13. Все линейные дифференциальные операторы с постоянными (вещественными) коэффициентами образуют коммутативное кольцо $\mathcal{D}$. Так как любой такой оператор записывается как многочлен от операторов $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, то это кольцо изоморфно кольцу многочленов

$$\mathcal{D} \simeq \mathbb{R}[t_1, \ldots, t_n], \ \frac{\partial}{\partial x_i} \mapsto t_i, \ \ i = 1, \ldots, n$$

а) Показать, что кольцо $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ является модулем над кольцом $\mathcal{D}$.

б) Является ли $\mathcal{D}$-модуль $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ конечным над $\mathcal{D}$?

в) Показать,что любой элемент этого $\mathcal{D}$-модуля является элементом кручения.

14. Дать определение проективной абелевой группы и провести их классификацию.