Теорема Штейница об изоморфизме

Пусть A — дедекиндово кольцо. Как мы знаем, любой ненулевой проективный A-модуль P есть прямая сумма ненулевых идеалов кольца A.

> *Теорема.* Две прямые суммы ненулевых идеалов $I_1 \oplus \cdots \oplus I_k$ и $J_1 \oplus \cdots \oplus J_s$ изоморфны как A-модули тогда и только тогда, когда $k = s$ и классы идеалов $\prod I_j$ и $\prod J_i$ совпадают.

В частном случае $k = s = 1$ эта теорема утверждает, что два идеала I и J из A изоморфны как A-модули в том и только том случае, когда $\mathcal{C}\ell(I) = \mathcal{C}\ell(J)$ (т.е. когда существует такое λ из материнского поля $K = R(A)$, что $\lambda I = J$). Этот факт уже был нами отмечен (см. замечание из лекций 5-6). Вообще, полезно понимать, что если A — любая область целостности, а I и J — любые два ненулевых идеала в ней, то $\mathrm{Hom}_A(I, J) = \{\lambda \in R(A) \,|\, \lambda I \subset J\}$. Иными словами, мы утверждаем, что любое A-линейное отображение $\varphi : I \to J$ определяет такой единственный элемент поля частных λ, что $\varphi(a) = \lambda a$ для всех $a \in I$.

В самом деле, выберем ненулевой элемент $a_0 \in I$. Тогда $a_0\varphi(I) = \varphi(a_o I) = \varphi(a_0)I$, т.е. $\varphi(I) = \dfrac{\varphi(a_0)}{a_0} I$.

> *Упражнение 1.* Показать, что $\mathrm{Hom}_A(I, J) = JI^{-1}$ для дедекиндового кольца A.

Перейдем к доказательству теоремы Штейница.
Нам понадобится одна элементарная конструкция из "Ящика с инструментами".

Локализация A-модуля

Пусть A — кольцо без делителей нуля, S — мультипликативная полугруппа с единицей из $A^* = A - \{0\}$, и $\dfrac{A}{S}$ — локализация кольца A относительно S (коротко: S-локализация; см. Листок №6). Операция локализации определяется и для A-модулей. Пусть M — модуль над кольцом A. Рассмотрим "дроби" вида $\dfrac{m}{s}$, где $m \in M$, а $s \in S$ (пока это формальный символ), и на множестве таких дробей введем отношение эквивалентности: $\dfrac{m}{s} \sim \dfrac{m'}{s'} \Longleftrightarrow ms' = sm'$. Множество классов эквивалентных дробей $\left[\dfrac{m}{s}\right]$ образует A-модуль $\dfrac{M}{S}$ с очевидными формулами сложения "дробей" и умножения "дроби" на элемент кольца A. Вот он-то и называется локализацией A-модуля M относительно S. Обратите внимание, что $\dfrac{M}{S}$ является модулем над кольцом $\dfrac{A}{S}$ (почему?).

Замечание. В терминах тензорного умножения A-модулей определение локализации особенно просто:

$$\frac{M}{S} = M \underset{A}{\otimes} \frac{A}{S}$$

Гомоморфизм локализации $m \to [\frac{m}{1}]$ вкладывает M в $\dfrac{M}{S}$ (почему?). В частности, если $S = A^*$, то A-модуль M вкладывается в векторное пространство $V = K \underset{A}{\otimes} M$, которое конечномерно, если M — конечный A-модуль. В этом случае $\dim_K V = \dim_K(K \otimes M)$ называется ***рангом модуля*** M (пишем $\mathrm{rk}_A M$).

> *Упражнение 2.* Покажите, что ранг любого ненулевого идеала дедекиндового кольца равен 1.

> *Упражнение 3.* Покажите, что $\mathrm{rk}_A(M_1 \oplus M_2) = \mathrm{rk}_A M_1 \oplus \mathrm{rk}_A M_2$.

Из упражнений 2 и 3 сразу следует (как?) та часть теоремы Штейница, которая утверждает, что $k = s = \mathrm{rk}_A M$, если $M = \bigoplus\limits_1^k I_j = \bigoplus\limits_1^s J_i$.

Покажем теперь, что из $M = \bigoplus\limits_1^s I_j = \bigoplus\limits_1^s J_i$ следует, что $\mathcal{C}\ell(\prod I_j) = \mathcal{C}\ell(\prod J_i)$. Вот короткое, но преждевременное доказательство:

Ясно, что модуль $M = \bigoplus\limits_1^s I_j$ естественно вложен в $A^S = K^S = V$. Рассмотрим одномерное векторное пространство $\Lambda^S V$ над полем K. В нем содержится A-модуль $\Lambda^S M$, который, являясь A-модулем ранга 1, полностью определяется классом некоторого идеала из дедекиндового кольца A. Легко проверить, что этот идеал и есть $\prod_1^s I_j$. $\square$

На самом деле предположение о дедекиндовости кольца A в этом месте излишне. Это станет ясным, если обратиться к следующему "координатному" пересказу преждевременного доказательства. Пусть существует A-линейный изоморфизм

$$\varphi : \ I_1 \oplus \cdots \oplus I_s \to J_1 \oplus \cdots \oplus J_s.$$

Вспоминая, что каждое из индуцируемых φ A-линейных отображений $\varphi_{ji} : \ I_j \to J_i$ есть умножение на число λ_{ji} из поля K, приходим к выводу, что изоморфизм φ задается матрицей $\Lambda = (\lambda_{ji})$, $\lambda_{ji} \in K$, которая, по необходимости, обратима (кстати, отсюда получается, что $k = s$). Покажем, что $J_1 \cdots J_s = (\det \Lambda) I_1 \cdots I_s$.

В самом деле, если $a_j \in I_j$, то $\det \Lambda \cdot \prod a_j$ есть не что иное, как определитель матрицы

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_s \end{pmatrix} \Lambda$$

Но j-я строка матрицы Λ' равна $(\lambda_{ji} a_j)$. Мы видим, что все элементы j-й строки принадлежат J_i. Следовательно, $\det \Lambda' \subset \prod J_i$. Следовательно, $\det \Lambda \prod I_j < \prod J_i$ и аналогично $(\det \Lambda)^{-1} \prod J_i < \prod I_j$, что и требовалось доказать.

Проверим теперь, что $s = \mathrm{rk}_A M$ и $\mathcal{C}\ell(\prod\limits_1^s I_j)$ составляют полную систему инвариантов модуля $M = \bigoplus I_j$. Для этого достаточно доказать (почему?) следующее утверждение.

Центральная лемма. Модуль $I_1 \oplus I_2$ изоморфен модулю $A \oplus I_1 I_2$.

Доказательство. Если I_1 и I_2 взаимно просты, то это можно доказать так: поскольку $I_1 + I_2 = A$, то найдутся такие элементы $c \in I_2$ и $d \in I_1$, что $c + d = 1$.

Рассмотрим (обратимую над A) матрицу $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(A)$. Покажем, что $\Lambda \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ I_1 I_2 \end{pmatrix}$. В самом деле, $\Lambda \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 + I_2 \\ cI_1 + dI_2 \end{pmatrix}$. Остается показать, что мы получили отображение "на". В самом деле, так как идеалы I_1 и I_2 взаимно просты, то $I_1 \cap I_2 = I_1 I_2$. Пусть $x \in I_1 \cap I_2$. Тогда $\Lambda \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$, т.е. в образе содержатся все векторы вида $\begin{pmatrix} 0 \\ I_1 I_2 \end{pmatrix}$. С другой стороны, вектор $\begin{pmatrix} x + y \\ ? \end{pmatrix}$, $x \in I_1$, $y \in I_2$, $? \in I_1 I_2$ с заданной первой (и какой-то второй) координатой можно получить, применив Λ к вектору $\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$. $\square$

Общий случай сводится к рассмотренному с помощью следующего технического утверждения.

Техническая лемма. Если I и J — ненулевые идеалы в дедекиндовом кольце A, то в $\mathcal{C}\ell(I)$ существует такой идеал I', что $I' + J = A$ (т.е. идеал $I' < \mathcal{C}\ell(I)$ взаимно прост с J.)

Доказательство. Выберем ненулевой элемент $i_0 \in I$ и найдем такой идеал $T < A$, что $i_0 A = IT$. По лемме 3 идеал T становится главным в факторкольце A/TJ. Следовательно, идеал T имеет вид $T = a_0 A + TJ$, $a_0 \in T$ (почему?). Умножая обе части на I, получим

$$i_0 A = a_0 I + i_0 J$$

Деля на i_0, находим, что

$$A = \frac{a_0}{i_0} I + J$$

Осталось заметить, что идеал $\frac{a_0}{i_0} I < A$ принадлежит (по определению) $\mathcal{C}\ell(I)$. $\square$

Категории и функторы. Функтор $\otimes$

Задать категорию K значит задать:

1) множество $\mathrm{Ob}\, K$, элементы которого называются *объектами категории* K,

2) множество $\mathrm{Mor}\, K$, элементы которого называются *морфизмами категории* K или "стрелками", а также:

3) каждому морфизму $f \in \mathrm{Mor}\, K$ сопоставить упорядоченную пару объектов X, Y категории K (X и Y — начало и конец стрелки f, записывается $f : X \to Y$); через $\mathrm{Hom}_K(X, Y)$ обозначим множество всех морфизмов из X в Y;

4) для любой тройки объектов X, Y, $Z \in \mathrm{Ob}\, K$ и пары стрелок $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ однозначно определить стрелку $gf : X \to Z$, которая называется *произведением морфизмов* f *и* g
(так определенное произведение морфизмов должно быть ассоциативно, т.е. $h(gf) = (hg)f$ если, скажем, левая часть определена);

5) для каждого объекта $X \in \mathrm{Ob}\, K$ предусмотреть существование такого единичного (тождественного) морфизма $1_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$, что $f \cdot 1_X = f$ и $1_X \cdot g = g$ для любых стрелок $f : X \to Y$ и $g : Z \to X$.

Упражнения.

а) Проверить единственность морфизма 1_X.

б) В нижеследующих примерах мы ограничимся указанием только объектов и морфизмов. Проверка всех остальных условий — тема для упражнения.

Примеры категорий:

1. Категория Sets. Объектами этой категории являются множества, а морфизмами $f : X \to Y$ — отображения множества X в множество Y.

2. Top — категория топологических пространств и их непрерывных отображений.

3. Категория $\mathrm{Mod}\, A$ ($A\mathrm{Mod}$) правых (левых) модулей над кольцом A и их морфизмов (A-линейных отображений).

4. Объектами категории Mat служат натуральные числа, а $\mathrm{Hom}(m, n)$ определяется как множество всех матриц $n \times m$ с коэффициентами из фиксированного поля K.

5. Объекты категории гомотопических пространств — это топологические пространства, а морфизмы — гомотопические классы непрерывных отображений (проверка ассоциативности не совсем очевидна).

6. *Дуальная категория* K°. Говоря неформально, по произвольной категории K можно построить новую категорию K°, положив $\mathrm{Ob}\, K^\circ = \mathrm{Ob}\, K$, $\mathrm{Mor}\, K^\circ = \mathrm{Mor}\, K$, но обратив направление стрелок: началом (концом) стрелки-морфизма f в категории K° объявим ее конец (начало) в категории K.

Формально, помечая $\circ$ все объекты из K°, определение дуальной категории запишем так:

$$\mathrm{Ob}\, K^\circ = (\mathrm{Ob}\, K)^\circ, (\mathrm{Mor}\, K)^\circ = (\mathrm{Mor}\, K)^\circ, \mathrm{Hom}_{K^\circ}(X,Y) = \mathrm{Hom}_K(Y,X)^\circ, g^\circ f^\circ = (fg)^\circ$$

Замечание. В произвольной категории имеет смысл понятие изоморфизма: $f : X \to Y$ называется изоморфизмом тогда и только тогда, когда $f \cdot f^{-1} = 1_Y$ и $f^{-1} \cdot f = 1_X$ для некоторого морфизма $f^{-1} : Y \to X$.

Упражнение. Проверьте, что а) морфизм f^{-1} определен однозначно; б) композиция изоморфизмов (если она определена) является изоморфизмом и $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

Задать *функтор* (*ковариантный функтор*) F из категории K в категорию L ($F : K \to L$) значит задать

1) отображение $F_{\mathrm{Ob}} : \mathrm{Ob}\, K \to \mathrm{Ob}\, L : X \mapsto F_{\mathrm{Ob}}(X)$

2) отображение $F_{\mathrm{Mor}} : \mathrm{Mor}\, K \to \mathrm{Mor}\, L$,

которые удовлетворяют условиям:

а) если $f : X \to Y$, то $F_{\mathrm{Mor}}(f) : F_{\mathrm{Ob}}(X) \to F_{\mathrm{Ob}}(Y)$

б) $F_{\mathrm{Mor}}(1_X) = 1_{F_{\mathrm{Ob}}(X)}$

в) $F_{\mathrm{Mor}}(g \cdot f) = F_{\mathrm{Mor}}(g) \cdot F_{\mathrm{Mor}}(f)$ (с обычной оговоркой, что композиция gf определена)

Обычно для краткости вместо F_{Ob} и F_{Mor} пишут $F(X)$ и $F(f)$.

Чаще всего функторам соответствуют "естественные" конструкции: когомологии и гомотопии, кольца представлений компактных групп, функтор "группа Ли $\to$ алгебра Ли" и т.д. Вот примеры попроще.

1. Если $\mathrm{Mod}\, A$ — категория правых A-модулей, X — фиксированный правый A-модуль, то $F_X : X \to \mathrm{Hom}(Y,X)$ — функтор из категории $\mathrm{Mod}\, A$ в категорию Ab абелевых групп ($\mathrm{Hom}(Y,X)$ естественно снабжается структурой абелевой группы).

2. Функтор "расширение поля".
   Если L — надполе поля K, то можно построить функтор $F : \mathrm{Alg}_K \to \mathrm{Alg}_L$ из категории K-алгебр в категорию L-алгебр, принимая за $F(A)$ алгебру $A_L = A \underset{K}{\otimes} L$ над полем L. Тогда $F(f)$, где $f : A \to B$, — гомоморфизм $f \otimes 1 : A_L \to B_L$ алгебр A_L и B_L над полем L.

3. Пусть G — полугруппа с единицей, которая рассматривается как множество морфизмов категории K_G, состоящей из одного объекта. Что такое функтор F из такой категории в категорию Vect векторных пространств над полем K? Ясно, что для задания F_{Ob} требуется зафиксировать векторное пространство V_K. Тогда $F(g) \in \operatorname{End} V_K$ для всякого элемента $g \in G$. Кроме того, $F(1) = 1_V$, а $F(g_1 g_2) = F(g_1)F(g_2)$. Иными словами, F_{Mor} — это представление полугруппы G в векторном пространстве V.

Функтор $\otimes$

Лето пролетит, и вы скажете с грустью: "Прощай, зелень лета. Здравствуй, алгебра III." Вот почему я расскажу о функторе $\otimes$ ровно в той степени общности, которая необходима для задач следующего семестра (в листочках есть дополнительная информация). В этой связи, кольцо A превращается в алгебру (не обязательно коммутативную). А модули над K-алгеброй A (алгебра над полем K) являются K-векторными простанствами (почему?).

Итак,

Тензорное произведение модулей над K-алгеброй A

Пусть M — правый, а N — левый A-модули. Отображение $\varphi : M \times N \to V$ (прямого произведения M на N в векторное пространство V_K) называется A-*билинейным*, если оно линейно по каждому аргументу и $\varphi(xa, y) = \varphi(x, ay)$. Взяв композицию φ с линейным отображением $V \to W$, получим новое A-билинейное отображение из $M \times N$ в K-векторное пространство W (или, как говорят, A-билинейное отображение со значениями в векторном пространстве W).

Оказывается, что всевозможные A-билинейные отображения $M \times N$ можно получить указанным способом из одного "универсального". Это универсальное A-билинейное отображение (назовем его t) принимает значения в векторном пространстве $M \underset{A}{\otimes} N$, которое называется *тензорным произведением модулей M и N над алгеброй A* (отметим, что $M \underset{A}{\otimes} N$ не является, вообще говоря, A-модулем).

Иными словами, для любого A-билинейного отображения $\varphi : M \times N \to L$ существует (и притом только одно) линейное отображение $\psi : M \underset{A}{\otimes} N \to L$, такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "t"'] & & L \\ & M \underset{A}{\otimes} N \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна (обычно $t(x, y)$ обозначают через $x \otimes y$).

Теорема существования

Вот конструкция универсального объекта $M \underset{A}{\otimes} N$.

В векторном пространстве $M \otimes N$ рассмотрим подпространство T, порожденное всеми элементами вида $xa \otimes y - x \otimes ay$, $x \in M$, $y \in N$, $a \in A$. Фактор-пространство $M \otimes N/T$ и есть тензорное произведение $M \underset{A}{\otimes} N$.

Пусть $\pi: M \otimes N \to M \underset{A}{\otimes} N$ — естественная проекция. Композиция π с билинейным отображением $M \times N \to M \otimes N$ (напомним, что при этом отображении $(x, y) \mapsto x \otimes y$) дает нужное A-билинейное отображение t (проверьте это).

Проверим свойство универсальности. Из универсальности тензорного произведения векторных пространств над полем K немедленно получаем (поскольку φ билинейно), что существует единственное линейное отображение $\tilde{\psi}$, обладающее свойством $\tilde{\psi}(x \otimes y) = \varphi(x, y)$.
Покажем, что $\tilde{\psi}|_T = 0$. В самом деле,

$$\tilde{\psi}(ax \otimes y - x \otimes ay) = \tilde{\psi}(ax \otimes y) - \tilde{\psi}(x \otimes ay) = \varphi(ax, y) - \varphi(x, ay) = 0.$$

Следовательно, $T \subset \operatorname{Ker} \tilde{\psi}$, и $\tilde{\psi}$ индуцирует единственное линейное отображение $\psi: M \underset{A}{\otimes} N \to L$ такое, что $\varphi = \psi \cdot t$.

Мы хотим рассмотреть тензорное произведение как функтор в категории модулей. С этой целью зафиксируем левый A-модуль N и построим функтор
F : {категория правых A-модулей} $\to$ {категория векторных пространств}, сопоставляя каждому правому A-модулю M векторное пространство $M \underset{A}{\otimes} N$, а всякому A-линейному отображению $f: M \to M'$ линейное отображение $f \underset{A}{\otimes} 1 : M \underset{A}{\otimes} N \to M' \underset{A}{\otimes} N$.

Для проверки аксиом функтора полезно следующее общее утверждение.

> *Техническая лемма.* Для любой пары гомоморфизмов A-модулей $f: M \to M'$ и $g: N \to N'$ существует единственное линейное отображение $f \underset{A}{\otimes} g : M \underset{A}{\otimes} N \to M' \underset{A}{\otimes} N'$ такое, что $(f \underset{A}{\otimes} g)(x \underset{A}{\otimes} y) = f(x) \underset{A}{\otimes} g(y)$.

Доказательство. Рассмотрим такое отображение $\varphi: M \times N \to M' \underset{A}{\otimes} N'$, что $\varphi(x, y) = f(x) \underset{A}{\otimes} g(y)$. Проверим A-билинейность построенного отображения φ. Линейность по каждому аргументу очевидна. Далее, $\varphi(xa, y) = f(xa) \underset{A}{\otimes} g(y) = f(x)a \underset{A}{\otimes} g(y) = f(x) \underset{A}{\otimes} ag(y) = f(x) \underset{A}{\otimes} g(ay) = \varphi(x, ay)$. Следовательно, существует единственное линейное отображение $f \underset{A}{\otimes} g : M \underset{A}{\otimes} N \to M' \underset{A}{\otimes} N'$ такое, что $(f \underset{A}{\otimes} g)(x \underset{A}{\otimes} y) = f(x) \underset{A}{\otimes} g(y)$ □

Замечание. Назовем левый A-модуль N ***комбайном типа*** A-B, если N одновременно является и правым B-модулем. В этом случае умножение элементов модуля N справа на элемент $b \in B$ индуцирует гомоморфизм левых A-модулей $N \to N$ (почему?) и, следовательно, линейное отображение $M \underset{A}{\otimes} N \to M \underset{A}{\otimes} N$, переводящее $x \otimes y$ в $x \otimes yb$. Тем самым, на $M \underset{A}{\otimes} N$ возникает структура B-модуля.

Упражнение 2.

1) Отображение $M \to M \underset{A}{\otimes} A$, при котором $m \mapsto m \otimes 1$, является изоморфизмом правых A-модулей.

2) В ситуации $M^1_A,\ M^2_A,\ {}_AN \quad (M^1 \oplus M^2) \underset{A}{\otimes} N = M^1 \underset{A}{\otimes} N \oplus M^2 \underset{A}{\otimes} N$.

3) В ситуации $M_A,\ {}_AN_B,\ {}_BL$ существует естественный изоморфизм $(M \underset{A}{\otimes} N) \underset{B}{\otimes} L \simeq M \underset{A}{\otimes} (N \underset{B}{\otimes} L)$.

4) В ситуации $M_A,\ {}_AN_B,\ {}_BL \quad \mathrm{Hom}_B(M \underset{A}{\otimes} N, L) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_B(N, L))$.

Тензорное произведение алгебр

Пусть A и B — алгебры над полем K. При фиксированных $a \in A$ и $b \in B$ левые сдвиги $x \mapsto ax$, $y \mapsto by$ на A и B соответственно являются линейными преобразованиями ℓ_a и ℓ_b K-модулей A и B соответственно. Согласно технической лемме существует такое единственное линейное преобразование $\ell_a \otimes \ell_b :\ A \otimes B \to A \otimes B$, что $(\ell_a \otimes \ell_b)(x \otimes y) = (\ell_a x \otimes \ell_b y) = (ax \otimes by)$, $x \in A$, $y \in B$.

Но отображение из $A \times B$, ставящее в соответствие паре (a, b) линейное преобразование $(\ell_a \otimes \ell_b) \in \mathrm{End}_K(A \otimes B)$, является K-билинейным. Поэтому для каждого элемента $p \in A \otimes B$ существует такое линейное преобразование $\ell_p \in \mathrm{End}(A \otimes B)$, что $\ell_{a\otimes b}(x \otimes y) = ax \otimes by$ на векторах p вида $a \otimes b$.

Положив $pq = \ell_p(q)$ для $p, q \in A \otimes B$, получим на $A \otimes B$ структуру ассоциативной алгебры с единицей (с "естественным умножением"). Эта алгебра называется *тензорным произведением алгебр A и B*.

Литература

Книга для чтения по алгебре. ОГИЗ, 1936

Ван дер Варден. *Алгебра.* Москва, Наука, 1976

С. Ленг. *Алгебра.* Москва, Мир, 1968