О функторе Hom

Рассмотрим точную последовательность A-модулей

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2.$$

Она индуцирует последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(N, M_1) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}(N, M) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}(N, M_2),$$

которая, как мы сейчас проверим, оказывается точной для любого модуля N.

Проверка. В самом деле, пусть $\varphi \in \operatorname{Hom}(N, M)$ и $g^*(\varphi)(n) = 0$ для любого $n \in N$. Это означает, что $g(\varphi(n)) = 0$ для любого $n \in N$, т.е. $\varphi(N) \subset \operatorname{Ker} g$, т.е. $\varphi(N) < f(M_1)$. Тогда в качестве такого $\psi \in \operatorname{Hom}(N, M_1)$, что $f^*\psi = \varphi$ можно взять $\psi = f^{-1} \circ \varphi$. Этим проверяется точность в $\operatorname{Hom}(N, M)$. Остается проверить, что $\operatorname{Hom}(N, M_1) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}(N, M)$ инъективно. Но это очевидно по той причине, что $M_1 \hookrightarrow M$. $\square$

Замечание. Hom не сохраняет короткие точные последовательности: в самом деле, если имеется короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0,$$

то нет никаких оснований утверждать, что любой $\varphi \in \operatorname{Hom}(N, M_2)$ можно продолжить до отображения $N \longrightarrow M$. Но если объект N проективен, то это так (см. рисунок).

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\text{эпиморфизм}"] & M_2 \\
& N \arrow[u, "\varphi\in\operatorname{Hom}(N,M_2)"'] \arrow[ul, "\substack{\text{нужная стрелка}\\ (\text{нужный } \operatorname{Hom}(N,M))}"]
\end{tikzcd}$$

Для произвольного модуля N справедливость восстанавливают группы Ext, но о них пока ни слова.

Упражнение. Если последовательность $M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$ точна, то для любого модуля N точна последовательность $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(M_2, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}(M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}(M_1, N)$.

Замечание. По отношению к фиксированному N говорят, что $\operatorname{Hom}(N, \ )$ — *ковариантный*, а $\operatorname{Hom}(\ , N)$ — *контравариантный* функтор.

Верно и обратное утверждение: если последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(N, M_1) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}(N, M) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}(N, M_2)$$

точна для любого N, то отсюда вытекает точность последовательности

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2.$$

Доказательство. Если, например, f не вложение, то в качестве N возьмем $\operatorname{Ker} f$, а в качестве ненулевого элемента φ из $\operatorname{Hom}(N, M_1)$ вложение $\operatorname{Ker} f \hookrightarrow M_1$. Тогда $f^*(\varphi) = 0$ по определению, что противоречит условию. Не сложнее проверка и оставшегося "стыка".$\Box$

О функторе $\otimes$

Теорема. Пусть есть точная последовательность mod A-модулей $M'_A \longrightarrow M_A \longrightarrow M''_A \longrightarrow 0$. Тогда для любого комбайна ${}_AQ_B$ последовательность правых B-модулей

$$M' \underset{A}{\otimes} Q_B \longrightarrow M \underset{A}{\otimes} Q_B \longrightarrow M'' \underset{A}{\otimes} Q_B \longrightarrow 0$$

точна.

Доказательство. Нам достаточно проверить, что для любого mod B-модуля L_B точна последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_B(M'' \underset{A}{\otimes} Q_B,\, L_B) \longrightarrow \operatorname{Hom}_B(M \underset{A}{\otimes} Q_B,\, L_B) \longrightarrow \operatorname{Hom}_B(M' \underset{A}{\otimes} Q_B,\, L_B)$$

или точна последовательность (по теореме о Hom и $\otimes$)

$$\begin{gathered}0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M''_A,\, \operatorname{Hom}_B(L_B,\, {}_AQ_B)) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M_A,\, \operatorname{Hom}_B(L_B,\, {}_AQ_B)) \longrightarrow \\ \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M'_A,\, \operatorname{Hom}_B(L_B,\, {}_AQ_B)).\end{gathered}$$

Но такая последовательность точна в силу наших предыдущих рассмотрений, где в роли правого A-модуля N выступает $\operatorname{Hom}_B(L_B,\, {}_AQ_B)$. $\Box$

Об одном шедевре гомологической алгебры

Лемма Шануэля. Даны две точные последовательности:

$$\begin{gathered}0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow N_2 \longrightarrow P_2 \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0,\end{gathered}$$

причем модули P_1 и P_2 проективны. Тогда $P_2 \oplus N_1 \simeq P_1 \oplus N_2$.

Доказательство. Применим очень полезную конструкцию, которая называется "расслоенный квадрат":

$$S = \{\, (p_1, p_2) \in P_1 \times P_2 \;\mid\; f(p_1) = g(p_2) \,\}$$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] & P_2 \arrow[d, "g"] \\ P_1 \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

Ясно, что отображения pr_1 и pr_2 эпиморфны. Так как объект P_1 проективен, то $S = P_1 \oplus P_?$. Ясно, что $P_? = \operatorname{Ker} pr_1$, т.е. $P_?$ состоит из элементов вида $(0, p_2)$. Но $g(p_2) = 0$, т.е. $p_2 \in N_2$. Таким образом, $P_? = N_2$, или $S = P_1 \oplus N_2$.
Аналогично, $S = P_2 \oplus N_1$. $\Box$

Локальные кольца

A — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей.

Определение. Кольцо A называется *локальным*, если все необратимые элементы кольца образуют идеал (обозначим его $\mathfrak{m}$).

Легко видеть, что этот идеал максимален, и что это единственный максимальный идеал кольца A. Факторкольцо ${}^{A}\!/_{\mathfrak{m}}$ является полем.

Примеры.

1. Кольцо $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел, $\mathfrak{m} = p\mathbb{Z}_p$.

2. Кольцо сходящихся в некоторой окрестности нуля в $\mathbb{C}^n$ степенных рядов $O\{z_1, \ldots, z_n\}$. Здесь максимальный идеал состоит из функций $f \in O$ таких, что $f(0) = 0$.

3. A — область целостности, $P < A$ — простой идеал. Локализация $\dfrac{A}{S_P}$, где $S_P = A^* \backslash P$, представляет локальное кольцо с единственным максимальным идеалом $P\dfrac{A}{S_P}$.

4. Кольцо локально-регулярных функций на алгебраическом многообразии, обращающихся в нуль в точке x.

В дальнейшем A — локальное кольцо, а все модули конечны над A.
Пусть M — A-модуль. Тогда *слоем* M_0 называется ${}^{A}\!/_{\mathfrak{m}}$-модуль ${}^{M}\!/_{\mathfrak{m}M}$. Заметим, что поскольку ${}^{A}\!/_{\mathfrak{m}}$ — поле, то ${}^{M}\!/_{\mathfrak{m}M}$ — векторное пространство над полем ${}^{A}\!/_{\mathfrak{m}}$.

Знаменитая лемма Накаямы утверждает, что если модуль M нетривиален, то и слой нетривиален.

> *Лемма Накаямы.* Пусть M — конечный A-модуль. Если $M = \mathfrak{m}M$, то $M = (0)$.

Доказательство. Пусть $M = \langle m_1, \ldots, m_k \rangle$. Ввиду того, что $M = \mathfrak{m}M$,

$$m_i = \sum w_{ij} m_j, \text{ где } w_{ij} \in \mathfrak{m}.$$

Рассмотрим матрицу $E - W$, где $W = \{w_{ij}\}$. Докажем, что $E - W$ обратима. Сошлемся на простой общий факт:

> *Факт.* Пусть матрица T над локальным кольцом A такова, что она обратима по модулю $\mod \mathfrak{m}$. Тогда она обратима над A.

Воспользуемся сформулированным (но еще не доказанным) фактом: $E - W \equiv E \pmod{\mathfrak{m}}$, а потому матрица $E - W$ обратима. Из ее обратимости следует, что все $m_i = 0$.

Доказательство факта. По условию, существует такая матрица T', что $T'T = E + \mathfrak{m}S$. На диагонали матрицы $E + \mathfrak{m}S$ стоят обратимые элементы. Следовательно, элементарными (обратимыми) преобразованиями строк матрицу $E + \mathfrak{m}S$ можно привести к единичной. Таким образом, существует такая матрица Λ, что $\Lambda T'T = E$, что и требовалось. $\square$

Еще два лика Накаямы

Лемма 1. Элементы $m_1, \dots, m_n$ тогда и только тогда порождают M, когда они порождают ${}^{M}/_{\mathfrak{m}M}$.

Доказательство. В одну сторону все очевидно. Пусть $m_1, \dots, m_n$ порождают ${}^{M}/_{\mathfrak{m}M}$. Рассмотрим порожденный ими подмодуль $Q = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$ и точную последовательность

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow M \xrightarrow{\pi} {}^{M}/_{Q} \longrightarrow 0$$

Для любого $m \in M$ существует такое $q \in Q$, что $m - q \in \mathfrak{m}M$. С одной стороны, $\pi(m-q) = \pi(m)$. С другой стороны, $\pi(m-q) < \mathfrak{m}\pi(M) = \mathfrak{m}({}^{M}/_{Q})$. В итоге получаем, что ${}^{M}/_{Q} < \mathfrak{m}({}^{M}/_{Q})$. Так как обратное включение понятно, то $\mathfrak{m}({}^{M}/_{Q}) = {}^{M}/_{Q}$. По лемме Накаямы, ${}^{M}/_{Q} = (0)$. $\square$

Лемма 2. Если $\varphi : M \longrightarrow N$ — гомоморфизм A-модулей, причем отображение $\varphi_0 : {}^{M}/_{\mathfrak{m}M} \longrightarrow {}^{N}/_{\mathfrak{m}N}$ сюръективно, то и φ сюръективно.

Доказательство. Элементы $\overline{n}_i = \varphi_0(\overline{m}_i)$ порождают модуль ${}^{N}/_{\mathfrak{m}N}$. А тогда n_i порождают N. $\square$

Теорема. Проективный модуль над локальным кольцом свободен.

Доказательство. Проективный модуль есть прямое слагаемое свободного. Пусть $P \oplus Q = A^r$. Тогда ${}^{P}/_{\mathfrak{m}P} \oplus {}^{Q}/_{\mathfrak{m}Q} = ({}^{A}/_{\mathfrak{m}})^r$. Выберем в векторных пространствах ${}^{P}/_{\mathfrak{m}P}$ и ${}^{Q}/_{\mathfrak{m}Q}$ над полем ${}^{A}/_{\mathfrak{m}A}$ базисы $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_p$ и $\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_q$ соответственно (разумеется, $p + q = r$). По лемме Накаямы их “подъемы” $x_1, \dots, x_p$ и $y_1, \dots, y_q$ дают системы образующих модулей P и Q соответственно. Но легко видеть, что коллекция $\langle x_1, \dots, x_p,\ y_1, \dots, y_q \rangle$ линейно независима над A. Убедиться в этом можно, например, так: рассмотрим матрицу T перехода от стандартного базиса $\{(0, \dots, 1, \dots, 0)\}$ свободного модуля A^r к системе образующих $(x_1, \dots, x_p,\ y_1, \dots, y_q)$. Эта матрица обратима по модулю $\mathfrak{m}$. Но тогда она обратима и над A. $\square$