Оглавление

Глава 1. Алгебраические многообразия

1. Аффинные многообразия

Мы рассматриваем многообразия только над полями $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ (вещественные многообразия) и $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ (комплексные многообразия).

Пусть $\mathsf{k}[x_1, ..., x_n]$ - кольцо многочленов от переменных $x_1, ..., x_n$. Для всякого идеала I кольца $\mathsf{k}[x_1, ..., x_n]$ определим подмножество

$$V(I) := \{x \in \mathsf{k}^n \mid f(x) = 0 \text{ для всех } f \in I\}.$$

$V(I)$ называется *аффинным многообразием.* Таким образом, аффинное многообразие есть множество решений системы полиномиальных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

где $f_1, f_2, ...$ - образующие идеала I.

Теорема 1.1 (Теорема Гильберта о базисе)**.** *Всякая система полиномиальных уравнений эквивалентна системе состоящей из конечного числа полиномиальных уравнений.*

Доказательство см. в §2.

Пусть X - аффинное многообразие. Положим

$$I(X) := \{f \in \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n] \mid f|_X \equiv 0\},$$
$$\mathsf{k}[X] := \mathsf{k}[x_1, ..., x_n]/I(X).$$

Алгебра $\mathsf{k}[X]$ называется *алгеброй регулярных функций* на X. Такое название объясняется тем, что всякий элемент алгебры $\mathsf{k}[X]$ можно рассматривать как функцию на X. А именно, пусть

$$\pi : \mathsf{k}[x_1, ..., x_n] \to \mathsf{k}[x_1, ..., x_n]/I(X) = \mathsf{k}[X]$$

- гомоморфизм факторизации. Элемент $f \in \mathsf{k}[X]$ следующим образом определяет функцию на X (мы обозначаем эту функцию той же буквой f):

$$f : X \ \to \ \mathsf{k}, \qquad x \mapsto \widetilde{f}(x),$$

где $\widetilde{f} \in \mathsf{k}[x_1, ..., x_n]$ - какой-нибудь элемент из прообраза $\pi^{-1}(f)$. Несложно проверить, что это определение корректно.

Теорема 1.2. *Пусть $X \subset \mathsf{k}^n$ - аффинное многообразие. Тогда имеет место взаимнооднозначное соответствие:*

$$\{\textit{точки многообразия } X\} \ \leftrightsquigarrow \ \{\textit{гомоморфизмы алгебры } \mathsf{k}[X] \textit{ в поле } \mathsf{k}\}.$$

А именно, точке $x \in X$ соответствует гомоморфизм

$$\varphi_x : \mathsf{k}[X] \to \mathsf{k}, \quad f \mapsto f(x),$$

а гомоморфизму $\varphi : \mathsf{k}[X] \to \mathsf{k}$ соответсвтует точка $a = (a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i = \varphi(x_i)$.

Вопрос: *Какие алгебры являются алгебрами регулярных функций на аффинных многообразиях?* Очевидно, чтобы алгебра была алгеброй регулярных функций на аффинном многообразии необходимо, чтобы она (1) была конечнопорожденной и (2) не имела нильпотентов. В случае поля $\mathbb{R}$ условий (1) и (2) недостаточно. Например, для алгебры $\mathbb{R}[x]/(x^2+1))$ выполнено (1) и (2), но она не является алгеброй регулярных функций на каком-либо аффинном многообразии. А в случае поля $\mathbb{C}$ дело обстоит по другому. А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 1.3. *Пусть A - конечнопорожденная алгебра над $\mathbb{C}$ не содержащая нильпотентов. Тогда A является алгеброй регулярных функций на некотором аффинном многообразии X.*

Эта теорема является следствием знаменитой теоремы Гильберта о нулях.

Теорема 1.4 (Теорема Гильберта о нулях)**.** *Пусть I - идеал в кольце $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$. Тогда*

$$\mathbf{Rad}(I) = I(V(I)).$$

Доказательство см. в §3.

Задача 1.5. *Доказать, что для аффинных многообразий X и Y их произведение $X \times Y$ является аффинным многообразием и $\mathsf{k}[X \times Y] \simeq \mathsf{k}[X] \otimes \mathsf{k}[Y]$.*

2. Теорема Гильберта о базисе

Пусть A - коммутативное кольцо с единицей.

Определение 2.1. A называется *нетеровым*, если всякий идеал в A порождается конечным числом элементов. (Это условие эквивалентно тому, что всякая последовательность идеалов

$$I_1 \subset I_2 \subset ...$$

стабилизируется, то есть, $I_k = I_{k+1} = ...$ для некоторого k).

Теорема 2.2. *Пусть A - нетерово, M - конечно порожденный A-модуль. Тогда всякий фактормодуль и всякий подмодуль модуля M конечно порожден.*

Доказательство. Конечно порожденность фактормодуля очевидна. Пусть N - подмодуль модуля M, $x_1, ..., x_m$ - образующие модуля M. Индукцией по m докажем, что N конечно порожден.

Случай $m = 1$. В этом случае мы имеем сюръективный гомоморфизм

$$\varphi : A \to M, \qquad a \mapsto ax_1.$$

Пусть $a_1, ..., a_n$ - образующие идеала $\varphi^{-1}(N)$. Тогда $\varphi(a_1), ..., \varphi(a_n)$ - образующие подмодуля N.

Индуктивный шаг. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i'"] & N \arrow[r] \arrow[d, "i"] & N/N_1 \arrow[r] \arrow[d, "i''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & M \arrow[r, "\pi"] & M/M_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

в которой $M_1 = \langle x_1, \ldots, x_{m-1} \rangle$, $N_1 = N \cap \langle x_1, ..., x_{m-1} \rangle$. Нетрудно увидеть, что строки и столбцы этой диаграммы точны. Имеем:

- M_1 порожден $m - 1$ элементами $x_1, \ldots, x_{m-1}$ $\Longrightarrow$ N_1 конечно порожден (по индукции). Пусть $y_1, \ldots, y_n$ - образующие N_1.

- M/M_1 порожден 1 элементом $\pi(x_1) \implies N/N_1$ конечно порожден (по индукции). Пусть $z_1, \dots, z_l$ - образующие N/N_1 и $\widetilde{z}_1, \dots, \widetilde{z}_l \in N$ - такие, что $\pi(\widetilde{z}_i) = z_i$.

Нетрудно проверить, что $j(y_1), \dots, j(y_n), \widetilde{z}_1, \dots, \widetilde{z}_l$ являются образующими модуля N. □

Теорема 2.3 (Теорема Гильберта о базисе)**.** *Пусть A - нетерово, тогда $A[x]$ нетерово.*

Доказательство. Пусть J - идеал в $A[x]$. Положим

$$J_k \ = \ \{a_0 \in A \mid \text{существует } a_0x^k + a_1x^{k-1} + ... + a_k \in J\}.$$

Тогда $J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \dots$ есть возрастающая последовательность идеалов в A. Так как A нетерово, то $J_n = J_{n+1} = ...$ для некоторого n. Пусть $b_1, \dots, b_m$ - образующие идеала J_n,

$$\widetilde{b}_1 = b_1x^{n_1} + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\widetilde{b}_m = b_mx^{n_m} + \dots$$

- соответствующие элементы идеала J, где $n_i \leqslant n$.

Рассмотрим $A[x]$ как A-модуль и пусть $M \subset A[x]$ есть A-подмодуль порожденный $1, x, ..., x^{n-1}$. Так как M конечно порожден, то $M \cap J$ конечно порожден. Пусть $c_1, ..., c_l$ - образующие A-модуля $M \cap J$.

Нетрудно проверить, что образующими идеала J будут $\tilde{b}_1, ..., \tilde{b}_m, c_1, ..., c_l$. □

Следствие 2.4. *Кольцо $\mathsf{k}[x_1, ..., x_n]$ нетерово.*

3. Теорема Гильберта о нулях

Сначала - вспомогательные леммы.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathbb{C} \subset K$ - расширение полей, причем K (как алгебра над $\mathbb{C}$) конечно порождена. Тогда $K = \mathbb{C}$.*

Доказательство см. в §6.

Лемма 3.2. *Пусть A конечно порожденная над $\mathbb{C}$ алгебра, $a \in A$ такой, что $a^n \neq 0$ для всех n. Тогда существует гомоморфизм $\varphi : A \to \mathbb{C}$ такой, что $\varphi(a) \neq 0$.*

Доказательство. Нам понадобятся *мультипликативные подмножества.* Напомним, что подмножество S кольца X называется мультипликативным, если $1 \in S$, $0 \notin S$ и $y_1, y_2 \in S$ влечет $y_1y_2 \in S$. Положим

$$S^{-1}X := \left\{ \ \frac{x}{y} \ \mid x \in X, \ y \in S \right\} \Big/ \sim,$$

где $\frac{x}{y} \sim \frac{x_1}{y_1}$ тогда и только тогда, когда $(xy_1 - x_1y)y_2 = 0$ для некоторого $y_2 \in S$. На множестве $S^{-1}X$ очевидным образом определяются операции умножения и сложения (складываем как дроби приводя к общему знаменателю). Относительно этих операций $S^{-1}X$ является кольцом. Имеем гомоморфизм колец

$$\alpha : X \ \rightarrow \ S^{-1}X, \quad x \mapsto \frac{x}{1}.$$

Если X является алгеброй над k, то $S^{-1}X$ является алгеброй над k. А именно, произведение $c \in \mathsf{k}$ на $\frac{x}{y} \in S^{-1}X$ есть $c(\frac{x}{y}) := \frac{cx}{y}$.

Рассмотрим подмножество $S = \{1, a, a^2, ...\} \subset A$. Подмножество S является мультипликативным подмножеством в A. Пусть $\mathfrak{m}$ - максимальный идеал в $S^{-1}A$. Так как $\frac{a}{1}$ обратим в $S^{-1}A$, то $\frac{a}{1} \notin \mathfrak{m}$. Рассмотрим гомоморфизмы алгебр

$$A \xrightarrow{\alpha} S^{-1}A \xrightarrow{\beta} (S^{-1}A)/\mathfrak{m} =: K$$

и положим $\varphi = \beta \circ \alpha$. Имеем: K является полем (так как $\mathfrak{m}$ - максимальный идеал) и K является конечно порожденной алгеброй над $\mathbb{C}$. Из Леммы 3.1 следует, что $K = \mathbb{C}$. По построению, $\varphi(a) \neq 0$. $\square$

Доказательство теоремы Гильберта о нулях. Напомним, что радикал идеала $\mathfrak{m}$ коммутативного кольца A определяется как

$$\mathbf{Rad}(\mathfrak{m}) := \{a \in A \mid a^m \in \mathfrak{m} \text{ для некоторого } m\}.$$

Включение $\mathbf{Rad}(I) \subset I(V(I))$ очевидно. Мы допустим, что $f \in I(V(I))$ и $f \notin \mathbf{Rad}(I)$ и получим противоречие.

Пусть $\pi : \mathbb{C}[x_1, ..., x_n] \rightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$ - гомоморфизм факторизации. Имеем: $(\pi(f))^n \neq 0$ для всех n. Пусть $\varphi : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I \rightarrow \mathbb{C}$ - такой гомоморфизм, что $\varphi(\pi(f)) \neq 0$ (см. лемму 3.2). Положим $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, где $a_i = \varphi(\pi(x_i))$. Для любого $g = \sum g_{i_1,...,i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m} \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ имеем:

$$\varphi(\pi(g)) = \varphi\left(\sum g_{i_1,...,i_m} \pi(x_{i_1}) \dots \pi(x_{i_m})\right) =$$
$$\sum g_{i_1,...,i_m} \varphi(\pi(x_{i_1})) \dots \varphi(\pi(x_{i_m})) = \sum g_{i_1,...,i_m} a_{i_1} \dots a_{i_m} = g(a).$$

Взяв $g = f$ получим $0 \neq \varphi(\pi(f)) = f(a)$. С другой стороны, согласно теореме 1.2, $a \in V(I)$ и, следовательно, $f(a) = 0$. Противоречие. $\square$

4. Топология Зарисского

Топологическое пространство называется *нетеровым*, если в нем всякая убывающая последовательность замкнутых подмножеств

$$Y_1 \supset Y_2 \supset Y_3 \supset ...$$

стабилизируется, т.е. $Y_m = Y_{m+1} = ...$ для некоторго m. Привычные для нас топологические пространства (например, гладкие многообразия) не являются нетеровыми. Однако нетеровыми являются аффинные многообразия относительно топологии Зарисского, которую мы определим в этом параграфе.

Пусть X - нетерово пространство. Замкнутое подмножество $Y \subset X$ называется *неприводимым*, если не существует замкнутых Y_1, Y_2 таких, что $Y = Y_1 \cup Y_2$, но $Y \not\subset Y_1$ и $Y \not\subset Y_2$ (не требуется $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$). Всякое замкнутое подмножество $Y \subset X$ можно разложить:

$$Y = \bigcup_{i=1}^{m} Y_i,$$

где Y_i неприводимо и $Y_i \not\subset Y_j$ для всех i, j. Подмножества Y_i в этом разложении называются *неприводимыми компонентами* Y. *Размерностью* l неприводимого замкнутого подмножества Y называется максимальная длина последовательности

$$Y \supsetneq Y_1 \supsetneq Y_2 \supsetneq \dots \supsetneq Y_l$$

замкнутых неприводимых подмножеств. Если подмножество Y приводимо, то размерностью Y называется максимум размерностей неприводимых компонент Y.

Пусть $X \subset \mathsf{k}^n$ - аффинное многообразие. Если аффинное многообразие $Y \subset \mathsf{k}^n$ (как множество) является подмножеством множества X, то будем говорить, что Y является подмногообразием многообразия X. Определим топологию Зарисского на X следующим образом: подмножество Y замкнуто в X тогда и только тогда когда Y является подмногообразием в X. Таким образом, замкнутые подмножества в X это в точности те, которые выделяются полиномиальными уравнениями, т.е. это подмножества вида

$$V(I) = \{x \in X \mid f(x) = 0 \text{ для всех } f \in I\},$$

где I некоторый идеал в $\mathsf{k}[X]$. Базой топологии Зарисского являются подмножества вида

$$X_g = \{x \in X \mid g(x) \neq 0\},$$

где $g \in \mathsf{k}[X]$.

Теорема 4.1. *Для аффинного многообразия X следующие условия эквивалентны:*
(1) *X неприводимо;*
(2) *алгебра $\mathsf{k}[X]$ не имеет делителей нуля;*
(3) *идеал $I(X)$ прост.*

Пусть X неприводимо. Тогда алгебра $\mathsf{k}[X]$ не имеет делителей нуля и мы можем образовать поле частных этой алгебры (оно обозначается $\mathsf{k}(X)$). Поле $\mathsf{k}(X)$ называется *полем рациональных функций многообразия* X. Такое название объясняется тем, что элемент $r = \frac{f}{g} \in \mathsf{k}(X)$ можно рассматривать как функцию на X:

$$r = \frac{f}{g} : X \to \mathsf{k}, \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Заметим, что для рациональной функции r имеются различные представления в виде дробей. Дроби $\frac{f}{g}$ и $\frac{f_1}{g_1}$ определяют одну и ту же рациональную функцию тогда и только тогда когда $fg_1 = f_1 g$. Область определения рациональной функции $r = \frac{f}{g}$ есть, по определению

$$\left\{x \in X \mid g(x) \neq 0 \text{ для некоторого представления } r = \frac{f}{g}\right\}$$

Очевидно, область определения рациональной функции $r = \frac{f}{g}$ содержит открытое подмножество X_g (но может быть больше чем X_g).

Задача 4.2. *Пусть X, Y - неприводимые аффинные многообразия. Доказать, что $X \times Y$ неприводимо.*

Следующие две теоремы - без доказательства.

Теорема 4.3. *Пусть* $\mathsf{k} = \mathbb{C}$, X *- неприводимое аффинное многообразие. Тогда* $\dim(X) = \mathbf{tr.deg}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(X))$ *(:= степень трансцендентности поля* $\mathbb{C}(X)$ *над* $\mathbb{C}$*).*

Теорема 4.4. *Пусть* $\mathsf{k} = \mathbb{C}$, X *- неприводимое аффинное многообразие,* $0 \neq f \in \mathbb{C}[X]$*. Рассмотрим*

$$V(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}.$$

Пусть

$$V(f) = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_l$$

- разложение на неприводимые компоненты. Тогда

$$\dim(V_i) = \dim(X) - 1$$

для всех i.

Следствие 4.5. *Пусть* $\mathsf{k} = \mathbb{C}$, X *- неприводимое аффинное многообразие,* $Y \subsetneq X$ *- собственное подмногообразие. Тогда* $\dim(Y) < \dim(X)$.

Итак, для аффинных многообразий имеется две топологии: классическая (индуцированная стандартной топологией пространства k^n) и топология Зарисского. Договоримся так: по умолчанию мы используем топологию Зарисского. Иногда, при использовании топологии Зарисского, мы будем упоминать, что используется именно она. При использовании классической топологии всякий раз мы будем это специально оговаривать.

5. Морфизмы аффинных многообразий

Морфизм (иногда говорят *регулярный морфизм*) аффинного многообразия $X \subset \mathsf{k}^n$ в аффинное многообразие $Y \in \mathsf{k}^m$ - это отображение вида

$$\varphi : X \to \mathsf{k}^m, \qquad x \mapsto \varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)),$$

где $\varphi_i \in \mathsf{k}[X]$, причем $\mathbf{Im}(\varphi) \subset Y$.

Морфизм $\varphi\colon X \to Y$ аффинных многообразий определяет гомоморфизм алгебр регулярных функций

$$\varphi^* : \mathsf{k}[Y] \to \mathsf{k}[X], \quad \varphi^*(f)(x) = f(\varphi(x)).$$

Наоборот, гомоморфизм алгебр регулярных функций $\varphi^*\colon \mathsf{k}[Y] \to \mathsf{k}[X]$ определяет морфизм аффинных многообразий

$$\varphi : X \to Y, \quad y = \varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)),$$

где $\varphi_i(x) = \varphi^*(y_i|_Y)$.

Морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *доминантным*, если $\overline{\mathbf{Im}(\varphi)} = Y$. Аффинные многообразия X и Y называются изоморфными, если существуют морфизмы $\varphi\colon X \to Y$ и $\psi\colon Y \to X$ такие, что $\psi^* \circ \varphi^* = \mathbf{id}_{\mathsf{k}[Y]}$ и $\varphi^* \circ \psi^* = \mathbf{id}_{\mathsf{k}[X]}$.

То, что аффинные многообразия X и Y (соотв. алгебры $\mathsf{k}[X]$ и $\mathsf{k}[Y]$) изоморфны записывают так: $X \simeq Y$ (соотв. $\mathsf{k}[X] \simeq \mathsf{k}[Y]$).

Лемма 5.1. *Пусть* $\varphi : X \to Y$ *- морфизм,* X *неприводимо. Тогда* $\overline{\varphi(X)}$ *неприводимо и* $\dim(\overline{\varphi(X)}) \leqslant \dim(X)$.

Рациональный морфизм неприводимого аффинного многообразия X в аффинное многообразие $Y \in \mathsf{k}^m$ - это отображение вида

$$\varphi : X \to \mathsf{k}^m, \quad x \mapsto \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)),$$

где $\varphi_i \in \mathsf{k}(X)$, причем

$$\mathbf{Im}(\varphi) := \{\varphi(x) \mid \varphi_1(x), ..., \varphi_m(x) \text{ определены в } x\} \subset Y.$$

Рациональный морфизм φ называется *доминантным,* если $\overline{\mathbf{Im}(\varphi)} = Y$. Если X неприводимо, $\varphi\colon X \to Y$ - регулярный морфизм, то φ является рациональным морфизмом.

Лемма 5.2. *Пусть $\varphi\colon X \to Y$ - рациональный морфизм. Тогда $\overline{\varphi(X)}$ неприводимо и $\dim(\overline{\varphi(X)}) \leqslant \dim(X)$.*

Таким образом, рациональный морфизм $\varphi\colon X \to Y$ можно "разложить": $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$, где $\varphi_2\colon X \to \overline{\mathbf{Im}(\varphi)}$ - доминантный рациональный морфизм неприводимых аффинных многообразий, $\varphi_1\colon \overline{\mathbf{Im}(\varphi)} \hookrightarrow Y$ - вложение.

Рациональный доминантный морфизм $\varphi : X \to Y$ неприводимых аффинных многообразий определяет вложение полей

$$\varphi^* : \mathsf{k}(Y) \to \mathsf{k}(X), \quad \varphi^*(f)(x) = f(\varphi(x)).$$

Наоборот, вложение полей $\varphi^*\colon \mathsf{k}[Y] \to \mathsf{k}[X]$ определяет рациональный морфизм аффинных многообразий

$$\varphi : X \to Y, \quad y = \varphi(x) = (\varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)),$$

где $\varphi_i(x) = \varphi^*(y_i|_Y)$.

В оставшейся части этого параграфа мы докажем теорему 5.4 и следствие 5.5 которые проясняют то, как устроен образ регулярного морфизма в случае $\mathsf{k} = \mathbb{C}$. Теорема 5.4 является геометрической переформулировкой следующей алгебраической теоремы.

Теорема 5.3. *Пусть $A \subset B$ - расширение конечнопорожденных алгебр над $\mathbb{C}$, причем B без делителей нуля. Тогда для любого $0 \neq b \in B$ существует $a \in A$ такой, что для любого гомоморфизма $\varphi : A \to \mathbb{C}$ такого, что $\varphi(a) \neq 0$ существует гомоморфизм $\widetilde{\varphi} : B \to \mathbb{C}$ такой, что $\widetilde{\varphi}|_A = \varphi$ и $\widetilde{\varphi}(b) \neq 0$.*

Доказательство. Разберем следующие случаи:

(1) $B = A[u]$, причем u трансцендентен над A;

(2) $B = A[u]$, причем u удовлетворяет уравнению

$$c_0 u^k + c_1 u^{k-1} + \ldots + c_k = 0, \tag{5.1}$$

где $c_i \in A$;

(3) $A \subset B$ - произвольное расширение.

Случай (1). Пусть

$$b = a_0 u^k + a_1 u^{k-1} + \ldots + a_0, \quad a_i \in A.$$

Полагаем $a = a_0$. Чтобы определить $\widetilde{\varphi}$ надо указать $\widetilde{\varphi}(u)$. Так как u трансцендентен над A, то $\widetilde{\varphi}(u)$ можно взять любым. Возьмем $\widetilde{\varphi}(u) \in \mathsf{k}$ так чтобы $\widetilde{\varphi}(u)$ не был бы корнем уравнения

$$\varphi(a_0)\widetilde{\varphi}(u)^k + \varphi(a_1)\widetilde{\varphi}(u)^{k-1} + \ldots + \varphi(a_k) = 0.$$

Случай (2). Можно считать, что (5.1) является уравнением наименьшей степени которому удовлетворяет u. Элемент b алгебраичен над A (так как расширение алгебр $A \subset B$ алгебраично). Т.о.,

$$d_0 b^n + d_1 b^{n-1} + ... + d_n = 0, \tag{5.2}$$

где $d_i \in A$. Можно считать, что $d_n \neq 0$. Положим $a = c_0 d_n$. Чтобы определить $\widetilde{\varphi}$ надо указать $\widetilde{\varphi}(u)$. Возьмем $\widetilde{\varphi}(u)$ любым, удовлетворяющим уравнению

$$\varphi(c_0)\widetilde{\varphi}(u)^k + \varphi(c_1)\widetilde{\varphi}(u)^{k-1} + \ldots + \varphi(c_k) = 0.$$

Такой $\widetilde{\varphi}(u)$ подобрать можно, т.к. $\varphi(c_0) \neq 0$. Из (5.2) вытекает, что $\widetilde{\varphi}(b)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(d_0)\widetilde{\varphi}(b)^n + \varphi(d_1)\widetilde{\varphi}(b)^{n-1} + ... + \varphi(d_n) = 0$$

и, следовательно, $\widetilde{\varphi}(b) \neq 0$.

Случай (3) (т.е. общий случай) вытекает (по индукции) из уже разобранных частных случаев (1) и (2). □

Теорема 5.4 (Геометрическая переформулировка теоремы 5.3)**.** *Пусть* $\mathsf{k} = \mathbb{C}$, $\varphi : X \to Y$ *- доминантный морфизм аффинных многообразий, причем* X *неприводимо. Тогда для любого открытого подмножества* $X_f \subset X$ *существует открытое подмножество* $Y_g \subset Y$ *такое, что* $\varphi(X_f) \supset Y_g$.

Подмножество Z аффинного многообразия Y называется *конструктивным,* если

$$Z \ = \ \bigcup_{i=1}^{n} (Z_i' \setminus Z_i''),$$

где Z_i' - замкнутое подмножество в Y, а Z_i'' - замкнутое подмножество в Z_i'.

Следствие 5.5. *Пусть* $\mathsf{k} = \mathbb{C}$, $\varphi : X \to Y$ *- морфизм аффинных многообразий. Тогда образ* $\mathbf{Im}(\varphi)$ *является конструктивным в* Y *подмножеством.*

Это следствие доказывается индукцией по $\dim(X)$.

Замечание 5.6. То, что мы назывем аффинными многообразиями во многих книгах по алгебраической геометрии называют *вложенными аффинными многообразиями.* При этом аффинными многообразиями называют вложенные аффинные многообразия с точностью до изоморфизма.

6. Целые морфизмы аффинных многообразий

Пусть $A \subset B$ - расширение алгебр. Элемент $b \in B$ называется *целым* над A, если b удовлетворяет уравнению целой зависимости

$$b^n + a_1 b^{n-1} + ... + a_n = 0,$$

где $a_i \in A$. Расширение алгебр $A \subset B$ называется *целым*, если всякий элемент $b \in B$ цел над A.

Если $A \subset B$ - расширение алгебр и $b_1, \ldots, b_m \in B$, то через $A[b_1, \ldots, b_m]$ обозначают подалгебру алгебры B, порожденную над A элементами $b_1, \ldots, b_m$.

Задача 6.1. *Пусть* $A \subset B$ *- расширение алгебр,* $b \in B$*. Доказать, что* b *цел над* A *тогда и только тогда, когда* $A[b]$ *(как* A*-модуль) конечнопорожден.*

Задача 6.2. *Доказать следующие утверждения.*

(1) *Если алгебра B конечнопорождена над алгеброй A и образующие алгебры B целы над A, то B цела над A.*
(2) *Если алгебра B цела над алгеброй A, а алгебра C цела над B, то C цела над A.*

Теорема 6.3. *Пусть $A \subset B$ - целое расширение конечнопорожденных алгебр над $\mathbb{C}$. Тогда любой гомоморфизм $\alpha : A \to \mathbb{C}$ продолжается до гомоморфизма $\widetilde{\alpha} : B \to \mathbb{C}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{n} = \mathbf{Ker}(\alpha)$. A priori, возможные следующие два случая:

(1) $\mathfrak{n}B \neq B$;
(2) $\mathfrak{n}B = B$.

Рассмотрим случай (1). В этом случае пусть $\mathfrak{m}$ - максимальный идеал в B, содержащий $\mathfrak{n}B$. Тогда $B/\mathfrak{m}$ - поле, $\mathbb{C} = A/\mathfrak{n} \subset B/\mathfrak{m}$, причем расширение полей $\mathbb{C} \subset B/\mathfrak{m}$ алгебраично. Но поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто. Следовательно, $B/\mathfrak{m} = \mathbb{C}$. Определим теперь

$$\widetilde{\alpha} : B \to B/\mathfrak{m} = \mathbb{C}, \quad b \mapsto \overline{b}$$

(гомоморфизм факторизации).

Рассмотрим случай (2). На самом деле этот случай невозможен. Это вытекает из следующего общего утверждения.

Лемма 6.4 (Лемма Накаямы)**.** *Пусть $A \subset B$ - целое расширение алгебр над произвольным полем k и $\mathfrak{n}$ - идеал в A. Тогда $\mathfrak{n}B \neq B$.*

Доказательство. Применяя индукцию, сводим дело к случаю, когда B порождена над A одним элементом b. Пусть

$$b^n + a_1 b^{n-1} + ... + a_n = 0$$

- уравнение целой зависимости. Тогда B (как A-модуль) порожден элементами $m_1 = 1$, $m_2 = b$, $m_3 = b^2$, ... , $m_n = b^{n-1}$. Допустим $\mathfrak{n}B = B$. Тогда $m_i = \sum\limits_j \gamma_i^j m_j$, где $\gamma_i^j \in \mathfrak{n}$. Другими словами, $m_1, \dots, m_n$ удовлетворяют следующей системе уравнений

$$(6.1)\qquad \begin{cases} (1-\gamma_1^1)m_1 - \gamma_1^2 m_2 - \gamma_1^3 m_3 - \ldots - \gamma_1^n m_n = 0, \\ -\gamma_2^1 m_1 + (1-\gamma_2^2)m_2 - \gamma_2^3 m_3 - \ldots - \gamma_2^n m_n = 0, \\ -\gamma_3^1 m_1 - \gamma_3^2 m_2 + (1-\gamma_3^3)m_3 - \ldots - \gamma_3^n m_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\gamma_n^1 m_1 - \gamma_n^2 m_2 - \gamma_n^3 m_3 - \ldots + (1-\gamma_n^n)m_n = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу

$$(6.2)\qquad \begin{pmatrix} 1-\gamma_1^1 & -\gamma_1^2 & -\gamma_1^3 & \ldots & -\gamma_1^n \\ -\gamma_2^1 & 1-\gamma_2^2 & -\gamma_2^3 & \ldots & -\gamma_2^n \\ -\gamma_3^1 & -\gamma_3^2 & 1-\gamma_3^3 & \ldots & -\gamma_3^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\gamma_n^1 & -\gamma_n^2 & -\gamma_n^3 & \ldots & 1-\gamma_n^n \end{pmatrix}$$

системы (6.1) и пусть Δ_i - определитель матрицы, полученной из матрицы (6.2) вычеркиванием 1-го столбца и i-ой строки. Нетрудно заметить, что

$$\Delta_1 = 1 \mod \mathfrak{n}, \qquad \Delta_2, \dots, \Delta_n \in \mathfrak{n}. \tag{6.3}$$

Для $i = 1, \dots, n$ умножим i-е уравнение системы (6.1) на $(-1)^{i-1}\Delta_i$ и сложим полученные уравнения. Получим

$$\left((1-\gamma_1^1)\Delta_1 + \gamma_2^1\Delta_2 + \ldots + (-1)^n\gamma_n^1\Delta_n\right) m_1 = 0.$$

Отсюда и из (6.3) следует, что $(1-a)m_1 = 0$ для некоторого $a \in \mathfrak{n}$. Следовательно, $1 = m_1 = am_1 \in \mathfrak{n}$. Противоречие. □

□

Морфизм аффинных многобразий $\varphi : X \to Y$ назывется *целым*, если расширение алгебр $\varphi^*(\mathsf{k}[Y]) \subset \mathsf{k}[X]$ целое.

Следствие 6.5. *Пусть $\mathsf{k} = \mathbb{C}$, $\varphi : X \to Y$ - целый морфизм аффинных многообразий. Тогда если подмножество $X_0 \subset X$ замкнуто в X, то $\varphi(X_0)$ замкнуто в Y и морфизм*

$$\varphi_0 : X_0 \to \varphi(X_0), \quad x \mapsto \varphi(x)$$

является целым морфизмом.

Доказательство. Положим $Y_0 = \overline{\varphi(X_0)}$ и рассмотрим морфизм

$$\varphi_0 : X_0 \to Y_0, \quad x \mapsto \varphi(x).$$

Соответствующий гомоморфизм алгебр $\varphi_0^* : \mathbb{C}[Y_0] \to \mathbb{C}[X_0]$ является вложением алгебр. Нетрудно заметить, что расширение алгебр $\varphi_0^*(\mathbb{C}[Y_0]) \subset \mathbb{C}[X_0]$ является целым расширением. Возьмем произвольную точку $y \in Y_0$ и пусть $\alpha : \mathbb{C}[Y_0] \simeq \varphi_0^*(\mathbb{C}[Y_0]) \to \mathbb{C}$ есть соответствующий точке y гомоморфизм (см. теорему 1.2). По теореме 6.3 существует продолжение $\widetilde{\alpha} : \mathbb{C}[X_0] \to \mathbb{C}$. Пусть $x \in X_0$ - точка, соответствующая гомоморфизму $\widetilde{\alpha}$. Тогда $\varphi(x) = y$. Таким образом, мы доказали, что $\varphi(X_0) = Y_0$ и, следовательно, $\varphi(X_0)$ замкнуто.

То, что φ_0 является целым морфизмом, очевидно. □

При $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ морфизм φ аффинных многообразий цел тогда и только тогда, когда φ является собственным отображением относительно классической топологии. Напомним, что непрерывное отображение топологических пространств называется собственным, если прообраз компакта - компакт.

Задача 6.6. *Докажите, что целый морфизм аффинных многообразий $\varphi : X \to Y$ конечен, т.е. $|\varphi^{-1}(y)| < \infty$ для любой точки $y \in Y$.*

Лемма 6.7 (Лемма Нетер о нормализации)**.** *Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ - аффинное многообразие. Тогда существует линейное подпространство $L \subset \mathbb{C}^n$ и проектор $p : \mathbb{C}^n \to L$ такие, что*

$$p|_Z : Z \to L$$

есть целый сюръективный морфизм.

Доказательство. Индукция по n.

Случай $n = 1$ очевиден.

Индуктивный шаг. Если $I(Z) = \{0\}$, то $Z = \mathbb{C}^n$. В этом случае положим $p = \mathbf{id}_{\mathbb{C}^n}$.

Допустим, что $I(Z) \neq \{0\}$. Пусть $0 \neq f \in I(Z)$. Сделав, если надо, линейную замену координат $x_1, \ldots, x_n$, получим

$$f(x) = x_n^N + f_1(x_1, \ldots, x_{n-1})x_n^{N-1} + \ldots + f_N(x_1, \ldots, x_{n-1}). \tag{6.4}$$

Рассмотрим проектор

$$q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}, \qquad (x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, ..., x_{n-1}).$$

Морфизм

$$q|_Z : Z \to \overline{q(Z)}$$

цел, так как алгебра $\mathbb{C}[Z]$ порождена над $(q|_Z)^*(\mathbb{C}[\overline{q(Z)}])$ элементом $x_n|_Z$ и этот элемент цел над $(q|_Z)^*(\mathbb{C}[\overline{q(Z)}])$ (см. (6.4)). Следовательно, $q(Z) = \overline{q(Z)}$. По индукции пусть

$$p' : \mathbb{C}^{n-1} \to L$$

есть такой проектор, что

$$p'|_{q(Z)} : q(Z) \to L$$

есть целый сюръективный морфизм. Положим $p = p' \circ q$. □

Замечание 6.8. Из доказательства видно, что если выбрать линейное подпространство $L \subset \mathbb{C}^n$, где $\dim(L) = \dim(Z)$ и проектор $p : \mathbb{C}^n \to L$ в "*общем положении*", то морфизм

$$p|_Z : Z \to L$$

будет целым сюръективным морфизмом.

Лемма 6.9 (Алгебраическая переформулировка леммы Нетер)**.** *Пусть A - конечнопорожденная алгебра над $\mathbb{C}$. Тогда существуют алгебраически независимые $a_1, \ldots, a_m \in A$ такие, что A цела над $\mathbb{C}[a_1, \ldots, a_m]$.*

Доказательство леммы 3.1. Согласно лемме 6.9 возьмем алгебраически независимые над $\mathbb{C}$ элементы $a_1, \ldots, a_m \in K$ такие, что K цела над $\mathbb{C}[a_1, \ldots, a_m]$.

В случае $m = 0$ расширение полей $\mathbb{C} \subset K$ алгебраично. Из алгебраической замкнутости поля $\mathbb{C}$ следует $K = \mathbb{C}$.

Случай $m > 0$ на самом деле невозможен. Действительно, элемент $\frac{1}{a_1} \in K$ цел над $\mathbb{C}[a_1, \ldots, a_m]$, т.е.

$$\left(\frac{1}{a_1}\right)^N + f_1(a_1, \ldots, a_m)\left(\frac{1}{a_1}\right)^{N-1} + \ldots + f_N(a_1, \ldots, a_m) = 0$$

или

$$1 + f_1(a_1, \ldots, a_m)a_1 + \ldots + f_N(a_1, \ldots, a_m)a_1^N = 0.$$

Но это противоречит алгебраической независимости элементов $a_1, \ldots, a_m$. □

7. Аффинные многообразия с точки зрения классической топологии

Пусть $Z \subset \mathbb{C}^{n+m}$ - неприводимое аффинное многообразие, $\dim(Z) = n$. Согласно лемме Нетер, в $\mathbb{C}^{n+m}$ существует система координат $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$, такая, что ограничение на Z проекции

$$p : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n = L, \quad (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

является целым морфизмом. Так как $\mathbb{C}[Z]$ цела над $(p|_Z)^*(\mathbb{C}[L])$, то идеал $I(Z)$ содержит многочлены вида

$$f_1(x,y) = y_1^{N_1} + f_{1,1}(x)y_1^{N_1-1} + \ldots + f_{1,N_1}(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_m(x,y) = y_m^{N_m} + f_{m,1}(x)y_m^{N_m-1} + \ldots + f_{m,N_m}(x).$$

Многочлен $f_i(x,y)$ зависит от x, y_i и не зависит от $y_1, \ldots, \widehat{y_i}, \ldots, y_m$ (шляпка $\widehat{}$ показывает, что соответствующий элемент не входит в список). Для $i = 1, \ldots, m$ пусть $D_i(x) \in \mathbb{C}[L]$ - дискриминант многочлена $f_i(x, y_i)$ (как многочлена от y_i). Можно считать, что все $D_i(x) \not\equiv 0$ (если $D_i(x) \equiv 0$, то вместо $f_i(x, y_i)$ берем $\frac{f_i(x,y_i)}{R(x,y_i)}$, где $R(x, y_i)$ - результант многочленов $f_i(x, y_i)$ и $\frac{df_i(x,y_i)}{dy_i}$ (как многочленов по y_i)). Рассмотрим открытые по Зарисскому подмножества

$$L^0 = \{x \in L \mid D_i(x) \neq 0 \text{ для некоторого } i\},$$

$$(\mathbb{C}^{n+m})^0 = \{(x,y) \mid x \in L^0\},$$

$$Z^0 = Z \cap (\mathbb{C}^{n+m})^0.$$

Задача 7.1. *Доказать, что Z^0 является аналитическим подмногообразием в $\mathbb{C}^{n+m}$ и отображение*

$$p|_{Z^0} : Z^0 \to L^0$$

является голоморфным неразветвленным накрытием.

Задача 7.2. *Доказать, что Z является замыканием Z^0 в классической топологии.*

Теорема 7.3. *Пусть Z неприводимо. Тогда Z связно в классической топологии.*

Перед доказательством укажем некоторые факты из комплексного анализа, которые мы будем использовать.

Определение 7.4. [1] Функцию $s : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ - будем называть *медленнорастущей*, если существуют $A, B \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbf{N}$ такие, что $|s(x)| < A|x|^l$ для всех $|x| > B$, где $|x| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots |x_n|^2}$.

Задача 7.5. *Рассмотрим многочлен*

$$h(x,t) = t^m + h_1(x_1, \ldots, x_n)t^{m-1} + \ldots + h_m(x_1, \ldots, x_n).$$

Обозначим через $T(x)$ максимум модулей корней многочлена $h(x,t)$ (как многочлена от t). Доказать, что $T(x)$ является медленнорастущей функцией.

Теорема 7.6 (Обобщенная теорема Луивилля)**.** *Всякая медленнорастущая аналитическая в $\mathbb{C}^n$ функция является многочленом.*

[1]Это определение имеет смысл только для этих лекций.

Теорема 7.7 (Теорема Римана о продолжении). *Пусть U - открытое (в классической топологии) подмножество в $\mathbb{C}^n$, $f(x)$ - аналитическая в U функция, $g(x)$ - аналитическая и ограниченная по модулю в $U^0 = U \setminus \{f(x) = 0\}$ функция. Тогда существует аналитическая в U функция $G(x)$ такая, что $G|_{U^0} = g$.*

Доказательство теоремы 7.3.

Согласно утверждению задачи 7.2, достаточно доказать, что Z^0 связно. Допустим, что это не так и пусть Z_1^0 - связная компонента многообразия Z^0, $Z_2^0 = Z^0 \setminus Z_1^0 \neq \emptyset$. Мы получим противоречие с неприводимостью Z, построив многочлены $H_1(x,y)$, $H_2(x,y)$ такие, что

- $H_1|_{Z_1^0} \equiv 0$ и $H_2|_{Z_2^0} \equiv 0$;
- $H_1(x,y) \neq 0$ для любой $(x,y) \in Z_2^0$ и $H_2(x,y) \neq 0$ для любой $(x,y) \in Z_1^0$.

Укажем, как построить $H_1(x,y)$. Для $x \in L^0$ положим

$$N(x) = |\{y \mid (x,y) \in Z_1\}|.$$

Из связности Z_1 и L^0 и утверждения задачи 7.1 следует, что $N(x) = \mathbf{const} =: N$. Рассмотрим следующую функцию на $(\mathbb{C}^{n+m})^0$:

$$H_1(x,y) = y_1^N - \sigma_1\left(y_1^{(1)}(x), \ldots, y_1^{(N)}(x)\right) y_1^{N-1} + \ldots + (-1)^N \sigma_N \left(y_1^{(1)}(x), \ldots, y_1^{(N)}(x)\right),$$

где

$$\{y^{(1)}(x), \ldots, y^{(N)}(x)\} = \{y \mid (x,y) \in Z_1\},$$

σ_i - i-я элементарная симметрическая функция. Функция H_1 не зависит от $y_2, \ldots, y_m$ и является многочленом по y_1. Корнями H_1 (как многочлена по y_1) являются $y_1^{(1)}(x), \ldots, y_1^{(N)}(x)$. Следовательно, $H_1(x,y) = 0$, если $(x,y) \in Z_1^0$, но $H_1(x,y) \neq 0$, если $(x,y) \in Z_2^0$.

Мы утверждаем, что H_1 является аналитической функцией. Действительно, по теореме о неявной функции H_1 аналитична на $(\mathbb{C}^{n+m})^0$. Рассмотрим компакт $K \subset \mathbb{C}^{n+m}$. Так как $p|_Z$ - собственное отображение, то H_1 ограничена на $K \cap (\mathbb{C}^{n+m})^0$. По теореме Римана о продолжении H_1 аналитична на внутренности K. Так как компакт K можно взять любым, то H_1 аналитична в $\mathbb{C}^{n+m}$.

Из утверждения задачи 7.5 следует, что $H_1(x,y)$ является медленнорастущей функцией. Согласно обобщенной теореме Луивилля, $H_1(x,y)$ - многочлен.

Аналогично строится $H_2(x,y)$. □

8. Регулярные и сингулярные точки

Пусть $X \subset \mathsf{k}^n$ - аффинное многообразие, $x \in X$. Определим *касательное пространство* T_xX в точке x к многообразию X следующим образом:

$$T_xX := \{v \in \mathsf{k}^n \mid df(v) = 0 \text{ для всех } f \in I(X)\} \subset \mathsf{k}^n.$$

Задача 8.1. *Доказать, что*

$$T_xX := \{v \in \mathsf{k}^n \mid df_i(v) = 0,\ i = 1, \ldots, m\},$$

где $f_1, \ldots, f_m$ - образующие идеала $I(X)$.

Лемма 8.2. *Пусть $X \subset \mathsf{k}^n$ - аффинное многообразие, $x \in X$. Тогда*

(1) *если x принадлежит ровно одной неприводимой компоненте X_i многообразия X, то* $\dim(T_xX) = \dim(T_xX_i)$*;*

(2) *если x принадлежит $\geqslant 2$ неприводимым компонентам $X_1, \ldots, X_m$ многообразия X, то* $\dim(T_x X) > \max\{\dim X_i \mid i = 1, \ldots, m\}$.

Определение 8.3. Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$ - аффинное многообразие. Точка $x \in X$ называется *регулярной* точкой, если x принадлежит ровно одной неприводимой компоненте X_i многообразия X, причем $\dim(T_x X_i) = \dim(X_i)$. Множество регулярных точек обозначается $X^{\mathbf{reg}}$. Положим $X^{\mathbf{sing}} := X \setminus X^{\mathbf{reg}}$. Всякая точка $x \in X^{\mathbf{sing}}$ называется *особой* точкой.

Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$ - неприводимое аффинное многообразие, $\dim(X) = m$. Тогда для всякой $x \in X^{\mathbf{reg}}$ существует окрестность U (в классической топологии) в $\mathbb{C}^n$ такая, что $X \cap U$ является m-мерным аналитическим подмногообразием в U.

9. Квазипроективные многообразия

В предыдущих параграфах мы определили аффинные многообразия. Вспомним, что в дифференциальной геометрии n-мерные многообразия определяют как пространства, склеенные из стандартных кусков - открытых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$. Возникает естественное желание по аналогии определить пространства, склеенные из аффинных многообразий. Этот план действительно можно реализовать и определить *алгебраические многообразия.* Однако во многих случаях "лучше" работать не с общими алгебраическими многообразиями, а с алгебраическими многообразиями специального вида - *квазипроективными многообразиями.* (Существуют алгебраические многообразия, которые не являются квазипроективными многообразиями.)

Рассмотрим проективное пространство $\mathbf{P}^n$. По определению, $\mathbf{P}^n$ есть множество прямых в векторном пространстве k^{n+1}.

Замечание 9.1. Напомним, что $\mathbf{P}^n$ можно рассматривать как "обычное" многообразие (при $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ - как вещественное C^∞-многообразие, при $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ - как комплексное многообразие).

Имеем отображение множеств

$$\mathsf{k}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{P}^n, \quad v \mapsto \overline{v} := \text{прямая } \{tv \mid t \in \mathsf{k}\}.$$

Рассмотрим в k^{n+1} координатные функции $x_0, \ldots, x_n$. Полином $f(x)$ называется однородным степени d, если $f(tx) = t^d f(x)$ для всех $x \in \mathsf{k}^{n+1}$, $t \in \mathsf{k}$. Однородные степени d полиномы образуют векторное пространство, которое мы обозначаем $S^d\left(\mathsf{k}^{(n+1)*}\right)$.

Определим в $\mathbf{P}^n$ топологию Зарисского. А именно, базой топологии Зарисского являются открытые подмножества вида

$$\mathbf{P}^n_f := \{\overline{x} \mid f(x) \neq 0\},$$

где $f \in S^d\left(\mathsf{k}^{(n+1)*}\right)$. Таким образом, замкнутые в топологии Зарисского подмножества имеют вид

$$PV(f_1, f_2, \ldots) := \{\overline{x} \in \mathsf{k}^n \mid f_i(x) = 0 \text{ для } i = 1, 2, \ldots\},$$

где $f_i \in S^{d_i}\left(\mathsf{k}^{(n+1)*}\right)$.

Теорема 9.2. *Топология Зарисского в* $\mathbf{P}^n$ *нетерова.*

Проективным многообразием называется замкнутое в $\mathbf{P}^n$ подмножество. Проективное многообразие $X \subset \mathbf{P}^n$ называется *замкнутым подмногообразием* проективного многообразия $Y \subset \mathbf{P}^n$, если X (как множество) является подмножеством множества Y. *Квазипроективным многообразием* называется множество вида $X \setminus Y$, где X - проективное многообразие, Y - замкнутое подмногообразие многообразия X. На квазипроективном многообразии определена топология Зарисского (= топология, индуцированная топологией Зарисского в $\mathbf{P}^n$). Замкнутыми подмножествами многообразия $X \setminus Y$ являются подмножества вида $Z \setminus (Z \cap Y)$, где Z - замкнутое подмногообразие в X.

Далее на квазипроективном многообразии строится *структурный пучок* $\mathcal{O}$. Это означает, что для всякого открытого подмножества $U \subset X$ определяется алгебра $\mathcal{O}_U$ регулярных функций на U. При этом для каждой точки $x \in X$ существует окрестность $x \in U \subset X$, изоморфная аффинному многообразию (т.е. определено взаимно однозначное отображение $U \to X$, где X - аффинное многообразие, при котором $\mathcal{O}_U$ переходит в $\mathsf{k}[X]$). Таким образом, "квазипроективное многообразие покрывается картами, которые являются аффинными многообразиями".

Далее определяются морфизмы квазипроективных многообразий.

10. Неособые проективные многообразия с точки зрения дифференциальной геометрии

Неособое проективное многообразие является компактным (в классической топологии) многообразием. Однако не всякое компактное аналитическое многообразие является проективным многообразим - имеются необходимые и достаточные условия, которые мы укажем в этом параграфе.

Пусть M - n-мерное комплексное многообразие. Рассмотрим *овеществление* $M_{\mathbb{R}}$ многообразия M. Имеем операторы

$$I : TM_{\mathbb{R}} \to TM_{\mathbb{R}}, \qquad I^* : T^*M_{\mathbb{R}} \to T^*M_{\mathbb{R}}, \tag{10.1}$$

где I соответствует умножению на $\sqrt{-1}$, а I^* есть сопряженный к I оператор. Оператор I^* соответствует умножению на $-\sqrt{-1}$.

При изучении $M_{\mathbb{R}}$ как вещественного многообразия удобно использовать комплексные системы координат и комплекснозначные функции на $M_{\mathbb{R}}$, а также комплексификации тензорных расслоений (касательного, кокасательного, ...).

Итак, рассмотрим комплексификацию $T_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}}$ касательного расслоения $TM_{\mathbb{R}}$ и комплексификацию $T^*_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}}$ кокасательного расслоения $TM_{\mathbb{R}}$. Рассмотрим комплексификации

$$I_{\mathbb{C}} : T_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}} \to T_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}}, \qquad I^*_{\mathbb{C}} : T^*_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}} \to T^*_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}}$$

операторов (10.1). Положим

$$T'_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}} := \{v \in T_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}} \mid I_{\mathbb{C}}(v) = \sqrt{-1}v\},$$
$$T''_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}} := \{v \in T_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}} \mid I_{\mathbb{C}}(v) = -\sqrt{-1}v\},$$
$$T^{*\prime}_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}} := \{u \in T^*_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}} \mid I_{\mathbb{C}}(u) = -\sqrt{-1}u\},$$
$$T^{*\prime\prime}_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}} := \{u \in T^*_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}} \mid I_{\mathbb{C}}(u) = \sqrt{-1}u\}.$$

Тогда

$$T_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}} = T'_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}} \oplus T''_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}}, \qquad T^*_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}} = T^{*\prime}_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}} \oplus T^{*\prime\prime}_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}}.$$

Пусть $z^1, \dots, z^n$ - комплексная система координат на $U \subset M$, $z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$. Тогда $x^1, y^1, \dots, x^n, y^n$ является (вещественной) системой координат на $U \subset M_{\mathbb{R}}$. На U имеем комплекснозначные функции $\bar{z}^i = x^i - \sqrt{-1}y^i$. Базисом пространства $T^{*\prime}_{\mathbb{C}} M_{\mathbb{R}}$ является $\left\{dz^i\right\}$, а базисом пространства $T^{*\prime\prime}_{\mathbb{C}} M_{\mathbb{R}}$ является $\left\{d\bar{z}^i\right\}$, где

$$dz^i = dx^i + \sqrt{-1}dy^i, \qquad d\bar{z}^i = dx^i - \sqrt{-1}dy^i.$$

Двойственным к базису $\left\{dz^i, d\bar{z}^i\right\}$ является базис $\left\{\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}\right\}$, где

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i}\right) \in T'_{\mathbb{C}} M_{\mathbb{R}},$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i}\right) \in T''_{\mathbb{C}} M_{\mathbb{R}}.$$

Имеем разложение

$$\Lambda^m(T^*_{\mathbb{C}} M_{\mathbb{R}}) = \bigoplus_{p+q=m} \Lambda^{p,q}(T^*_{\mathbb{C}} M_{\mathbb{R}}),$$

где

$$\Lambda^{p,q}(T^*_{\mathbb{C}} M_{\mathbb{R}}) = \Lambda^p(T^{*\prime}_{\mathbb{C}} M_{\mathbb{R}}) \otimes \Lambda^q(T^{*\prime\prime}_{\mathbb{C}} M_{\mathbb{R}}).$$

Обозначим

$$A^{p,q} = \Gamma(\Lambda^{p,q}(T^*_{\mathbb{C}} M_{\mathbb{R}})), \quad A^m = \bigoplus_{p+q=m} A^{p,q}, \quad A = \bigoplus_m A^m.$$

Элементы пространства $A^{p,q}$ называют (p,q)-формами. Локально элементы пространства $A^{p,q}$ имеют вид

$$\omega = \sum \omega_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q}(z) dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_q}.$$

Имеем включение $\Omega(M_{\mathbb{R}}) \subset A$, причем $\Omega^m(M_{\mathbb{R}}) \subset A^m$ для всех m.

Определение 10.1. Форма $\omega \in A$ называется *вещественной*, если $\omega \in \Omega(M_{\mathbb{R}})$.

Задача 10.2. *Доказать, что $(1,1)$-форма $\omega = \sqrt{-1}\sum h_{ij} dz^i \wedge d\bar{z}^j$ вещественна тогда и только тогда, когда матрица $H = (h_{ij})$ эрмитова (т.е., $H = \overline{H}^{\top}$).*

Имеем разложение

$$\partial = \partial + \bar{\partial},$$

где

$$\partial = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-1}I^*_{\mathbb{C}}) \circ d, \qquad \bar{\partial} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-1}I^*_{\mathbb{C}}) \circ d.$$

В координатах имеем:

$$\partial = \sum_i \frac{\partial}{\partial z^i} dz^i \ : \ A^{p,q} \to A^{p+1,q},$$
$$\bar{\partial} = \sum_i \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} d\bar{z}^i \ : \ A^{p,q} \to A^{p,q+1}.$$

Грубо говоря, на произвольном C^∞-многообразии есть оператор d внешнего дифференцирования, а на овеществленном комплексном многообразии есть два оператора: ∂ и $\bar{\partial}$, причем $d = \partial + \bar{\partial}$.

Определение 10.3. Квадратичную форму (2-форму) $b(\cdot,\cdot) : TM_{\mathbb{R}} \times TM_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ будем называть *согласованной с комплексной структурой*, если $b_x(I_x(v), I_x(v')) = b_x(v, v')$ для всех $x \in M_{\mathbb{R}}$, $v, v' \in T_xM_{\mathbb{R}}$. Форму $\omega \in \Omega^2(M_{\mathbb{R}})$ будем называть *положительно определенной*, если $-\omega_x(v, I_x(v)) > 0$ для всех $x \in M_{\mathbb{R}}$, $v \in T_xM_{\mathbb{R}}$. Вещественную $(1,1)$-форму $\omega = \sqrt{-1}\sum h_{ij} dz^i \wedge d\bar{z}^j$ назовем положительно определенной, если эрмитова матрица (h_{ij}) положительно определенна.

Задача 10.4. *Доказать, что $\omega \in \Omega^2(M_{\mathbb{R}})$ является согласованой с комплексной структурой положительно определенной 2-формой тогда и только тогда, когда ω, рассматриваемая как элемент пространства A^2, является положительно определенной вещественной $(1,1)$-формой.*

Согласно результату этой задачи,

$$\left\{\begin{matrix}\text{положительно определенные}\\ \text{согласованные с комплексной}\\ \text{структурой 2-формы на } M_{\mathbb{R}}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{положительно определенные}\\ \text{вещественные } (1,1)\text{-формы на } M\end{matrix}\right\}.$$

Задача 10.5. *Пусть M - комплексное многообразие, h - риманова метрика на овеществлении $M_{\mathbb{R}}$ многообразия M. Доказать, что*

$$g : TM_{\mathbb{R}} \times TM_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, \quad (v, v') \mapsto h(v, v') + h(I(v), I(v'))$$

является согласованной с комплексной структурой римановой метрикой на $M_{\mathbb{R}}$. (В частности, на произвольном комплексном многообразии всегда существуют согласованные с комплексной структурой римановы метрики.)

Определение 10.6. Сечение

$$\alpha = \sum_{i,j} h_{ij}(z) dz^i \otimes d\bar{z}^j \ \in \ \Gamma(T^{*\prime}_{\mathbb{C}} M_{\mathbb{R}} \otimes T^{*\prime\prime}_{\mathbb{C}} M_{\mathbb{R}})$$

называется *эрмитовой формой,* если (h_{ij}) является эрмитовой матрицей. Эрмитова форма α называется *положительно определенной,* если матрица (h_{ij}) положительно определена.

Всякую эрмитову форму можно естественным образом рассматривать как полуторалинейное отображение $T_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}} \times T_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$

Теорема 10.7. *Имеется взаимно однозначное соответствие между элементами следующих трех множеств:*

(1) *согласованные с комплексной структурой римановы метрики $g : TM_{\mathbb{R}} \times TM_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$;*
(2) *согласованные с комплексной структурой положительно определенные 2-формы $\omega : TM_{\mathbb{R}} \times TM_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$;*
(3) *положительно определенные эрмитовы формы $\alpha : T_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}} \times T_{\mathbb{C}}M_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$.*

А именно,

$$\omega_x(v, v') = g_x(v, I(v')), \quad \alpha_x(v, v') = g_x(v, v') - \sqrt{-1} g_x(v, I(v'));$$
$$g_x(v, v') = -\omega_x(v, I(v')), \quad \alpha_x(v, v') = -\omega_x(v, I(v')) - \sqrt{-1}\omega_x(v, v');$$
$$g_x(v, v') = \mathbf{Re}(\alpha_x(v, v')), \quad \omega_x(v, v') = -\mathbf{Im}(\alpha_x(v, v')).$$

Согласно теореме 10.7, имеем взаимно однозначное соответствие

$$\left\{\begin{matrix}\text{положительно определенные}\\ \text{вещественные } (1,1)\text{-формы на } M\end{matrix}\right\} \leftrightsquigarrow \left\{\begin{matrix}\text{положительно определенные}\\ \text{эрмитовы формы на } M\end{matrix}\right\}.$$

При этом соответствии

$$\sum h_{ij}(z)dz^i \wedge d\bar{z}^j \;\leftrightsquigarrow\; -\sqrt{-1}\sum h_{ij}(z)dz^i \otimes d\bar{z}^j. \tag{10.2}$$

Определение 10.8. *Кэлеровым* многообразием называется пара (M,ω), где M - комплексное многообразие, ω - положительно определенная вещественная $(1,1)$-форма на M такая, что $d\omega = 0$.

Теорема 10.9. *Для компактного комплексного многообразия M следующие условия эквивалентны.*

(1) *M является проективным многообразием;*
(2) *существует положительно определенная вещественная $(1,1)$-форма на M такая, что*
  (a) *$d\omega = 0$ (т.е., пара (M,ω) является кэлеровым многообразием),*
  (b) *$[\omega] \in H^2(M_{\mathbb{R}},\mathbb{Z})$ (т.е., форма ω целочисленна).*

Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) - это знаменитая теорема Кодаиры. Мы не будем ее доказывать. Укажем как доказать импликацию (1) $\Rightarrow$ (2).

Задача 10.10. *Пусть $N \subset M$ - комплексные многообразия, ω - положительно определенная вещественная $(1,1)$-форма на M. Доказать, что*

(1) *$\omega|_N$ является положительно определенной вещественной $(1,1)$-формой на N;*
(2) *если $d\omega = 0$ и $[\omega] \in H^2(M,\mathbb{Z})$, то $d(\omega|_N) = 0$ и $[\omega|_N] \in H^2(N,\mathbb{Z})$.*

Из утверждения этой задачи следует, что для доказательства импликации (1) $\Rightarrow$ (2) теоремы 10.9 достаточно в $\mathbf{P}^n$ указать положительно определенную вещественную $(1,1)$-форму $\omega \in H^2(\mathbf{P}^n,\mathbb{Z})$. В качестве такой формы можно взять, например, форму *Фубини-Штуди.* Напомним, что форма Фубини-Штуди локально на открытом подмножестве $U \subset \mathbf{P}^n$ определяется так:

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\|s(z)\|^2.$$

где $\|\cdot\|$ - стандартная эрмитова метрика на *универсальном расслоении,* $s(z)$ - какое-нибудь ненулевое голоморфное сечение универсального расслоения над U (несложно проверить, что от выбора сечения s форма ω не зависит).

11. Абелевы многообразия: условия Римана

Комплексный тор $\mathbb{C}^n/\Lambda$, где Λ - полная решетка в $\mathbb{C}^n$, называется *абелевым многообразием*, если он является проективным многообразием. В этом параграфе мы найдем необходимые условия (условия Римана) для того, чтобы тор $\mathbb{C}^n/\Lambda$ был абелевым многообразием.

Итак, пусть $T = \mathbb{C}^n/\Lambda$ - комплексный тор, $\lambda_1,\ldots,\lambda_{2n}$ - образующие решетки Λ (как абелевой группы). Тогда $\lambda_1,\ldots,\lambda_{2n}$ является базисом вещественного пространства $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$. Пусть $x^1,\ldots,x^{2n}$ - двойственный базис пространства $\mathbb{C}^{n*}_{\mathbb{R}}$.

Пусть $z^1, \dots, z^n$ - базис пространства $\mathbb{C}^{n*}$. Тогда $z^1, \dots, z^n, \bar{z}^1, \dots, \bar{z}^n$ будет базисом (над $\mathbb{C}$) комплексификации $(\mathbb{C}^{n*}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$. Следовательно, имеет место разложение $x^i = \pi^i_\alpha z^\alpha + \psi^i_\beta \bar{z}^\beta$, $1 \leqslant i \leqslant 2n$, где $\pi^i_\alpha, \psi^i_\beta \in \mathbb{C}$.

Задача 11.1. *Доказать, что* $\psi^i_\beta = \bar{\pi}^i_\beta$.

Т.о., согласно утв. этой задачи, имеем

$$x^i = \pi^i_\alpha z^\alpha + \bar{\pi}^i_\beta \bar{z}^\beta. \tag{11.1}$$

Введем в рассмотрение *матрицу периодов*

$$\Pi := \begin{pmatrix} \pi^1_1 & \pi^1_2 & \dots & \pi^1_n \\ \pi^2_1 & \pi^2_2 & \dots & \pi^2_n \\ \hdotsfor{4} \\ \pi^{2n}_1 & \pi^{2n}_2 & \dots & \pi^{2n}_n \end{pmatrix}.$$

Пусть комплексный тор T является проективным многообразием. Согласно теореме 10.9, на торе T существует положительно определенная целочисленная замкнутая согласованная с комплексной структурой 2-форма

$$\omega = \frac{1}{2} \sum q_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j.$$

Задача 11.2. *Доказать, что* $\overline{\omega} = \frac{1}{2} \sum \overline{q}_{ij} dx^i \wedge dx^j$, *где*

$$\overline{q}_{ij} = \frac{\int_T q_{ij}(x) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{2n}}{\int_T dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{2n}}$$

является положительно определенной целочисленной замкнутой согласованной с комплексной структурой 2-формой.

Согласно утверждению этой задачи, с самого начала мы можем считать, что

$$\omega = \frac{1}{2} \sum q_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

где $q_{ij} \in \mathbb{R}$.

Задача 11.3. *Доказать, что условие целочисленности формы* ω *эквивалентно условию* $q_{ij} \in \mathbb{Z}$.

Матрицей 2-формы ω является $\frac{1}{2}Q$, где $Q = (q_{ij})$. Согласно утверждению задачи 11.3, Q является целочисленной матрицей.

Имеем:

$$\omega = \frac{1}{2} \sum q_{ij} \left(\pi^i_\alpha dz^\alpha + \bar{\pi}^i_\beta d\bar{z}^\beta \right) \wedge \left(\pi^j_\gamma dz^\gamma + \bar{\pi}^j_\delta d\bar{z}^\delta \right) = \omega_{2,0} + \omega_{1,1} + \omega_{0,2},$$

где $\omega_{2,0} = \overline{\omega_{0,2}}$. Нетрудно заметить следующее.

(1) Условие того, что ω является $(1,1)$-формой эквивалентно условию

$$0 = 2\omega_{2,0} = \sum q_{ij} \pi^i_\alpha \pi^j_\gamma dz^\alpha \wedge dz^\gamma.$$

Через матрицы Π и Q это условие записывается так:

$$\Pi^\top Q \Pi = 0. \tag{11.2}$$

(2) Имеем:

$$\omega_{1,1} = \sum q_{ij}\pi^i_\alpha \bar{\pi}^j_\delta dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\delta.$$

Согласно (10.2), форме $\omega_{1,1}$ соответствует эрмитова форма

$$\varphi = -\sqrt{-1}\sum q_{ij}\pi^i_\alpha \bar{\pi}^j_\delta dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\delta$$

Матрицей эрмитовой формы φ является $-\sqrt{-1}\Pi^\top Q\overline{\Pi}$. Таким образом, условие того, что форма $\omega_{1,1}$ положительно определена эквивалентно условию

$$-\sqrt{-1}\Pi^\top Q\overline{\Pi} > 0. \tag{11.3}$$

Теперь мы можем сформулировать

Условия Римана. *Для того, чтобы комплексный тор $\mathbb{C}^n/\Lambda$ был проективным многообразием необходимо, чтобы существовала кососимметрическая целочисленная матрица Q, такая, что выполнено* (11.2) *и* (11.3).

12. Абелевы многообразия: тэта-функции

Фиксируем комплексный тор $T = \mathbb{C}^n/\Lambda$, где Λ - полная решетка в $\mathbb{C}^n$.

Ниже мы описываем конструкцию, которая по положительно определенной постоянной целочисленной согласованной с комплексной структурой 2-форме ω на $\mathbb{C}^n_\mathbb{R}$ позволяет строить одномерное комплексное векторное расслоение $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega \to T$ и его сечения (которые называются *тэта-функциями*). При некоторых условиях на ω эти тэта-функции определяют вложение тора T в проективное пространство.

Итак, пусть ω - положительно определенная постоянная целочисленная согласованная с комплексной структурой 2-форма на $\mathbb{C}^n_\mathbb{R}$.

Лемма 12.1. *Можно так подобрать образующие $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ решетки Λ, что*

$$\omega = \delta_1 x^1 \wedge x^{n+1} + \ldots + \delta_n x^n \wedge x^{2n},$$

причем $\delta_i > 0$ и δ_i делит δ_j при $i < j$, где $x^1, \dots, x^{2n}$ - двойственный базис пространства $\mathbb{C}^{n*}_\mathbb{R}$.

Будем считать, что $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ выбраны так как указано в лемме 12.1. Тогда матрицей 2-формы ω является $\frac{1}{2}Q$, где

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_n \end{pmatrix}.$$

Задача 12.2. *Доказать, что $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ линейно независимы над $\mathbb{C}$.*

Согласно утв. этой задачи, базисом в $\mathbb{C}^n$ можно взять $\delta_i^{-1}\lambda_i$, $i = 1, \dots, n$. Пусть $z^1, \dots, z^n$ - двойственный базис пространства $\mathbb{C}^{n*}$. Матрицей периодов является

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Delta^{-1} \\ Z \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что условия Римана записываются так:

(1) $Z = Z^\top$;

(2) $\mathbf{Im}(Z) > 0$.

Лемма 12.3. *Рассмотрим действие (сдвигами) решетки Λ на $\mathbb{C}^n$. Тогда существует единственный фактор автоморфии $\varphi : \Lambda \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^*$ такой, что*

(1) $\varphi(\lambda_\alpha, z) = 1$,
(2) $\varphi(\lambda_{\alpha+n}, z) = \exp(-2\pi\sqrt{-1}z_\alpha - \pi\sqrt{-1}Z_{\alpha\alpha})$

для $\alpha = 1, \ldots, n$.

....

Глава 2. Алгебраические группы

13. Определения и структурная теорема

Напомним, что основное поле у нас $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Определение 13.1. *Алгебраическая группа G* - это группа и квазипроективное многообразие одновременно. При этом эти две структуры на G естественным образом согласованы. А именно, групповые операции

$$\mu : G \times G \to G, \qquad (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2,$$
$$\iota : G \to G, \qquad g \mapsto g^{-1}$$

являются морфизмами квазипроективных многообразий. Алгебраическая группа G называется *линейной алгебраической группой*, если G - аффинное многообразие. *Гомоморфизм алгебраических групп* - это отображение являющееся одновременно гомоморфизмом групп и морфизмом многообразий. *Алгебраическая подгруппа* алгебраической группы - это подгруппа и замкнутое подмногообразие одновременно.

Вот примеры алгебраических групп:

- мультипликативная группа поля k^*;
- векторное пространство над k;
- полная линейная группа $\mathbf{GL}(m, \mathsf{k})$;
- специальная линейная группа $\mathbf{SL}(m, \mathsf{k})$;
- унитарная группа $\mathbf{U}_m$;
- специальная унитарная группа $\mathbf{SU}_m$;
- группа $\mathbf{B}^+(m, \mathsf{k})$ (соотв. $\mathbf{B}^-(m, \mathsf{k})$) верхнетреугольных (соотв. нижнетреугольных) невырожденных матриц ;
- группа $\mathbf{N}^+(m, \mathsf{k})$ (соотв. $\mathbf{N}^-(m, \mathsf{k})$) верхнетреугольных (соотв. нижнетреугольных) матриц с единицами на дигонали;
- группа $\mathbb{C}^n/\Lambda$, где Λ - полная решетка в $\mathbb{C}^n$. Такие группы называют *абелевыми многообразиями.* Напомним: для того чтобы группа $\mathbb{C}^n/\Lambda$ была проективным многообразием необходимо и достаточно чтобы решетка Λ удовлетворяла условиям Римана.

Задача 13.2. *Доказать, что произведение алгебраических групп являются алгебраической группой.*

Задача 13.3. *Доказать, что алгебраические группы являются неособыми многообразиями.*

Теорема 13.4. *Пусть алгебраическая группа G над $\mathbb{C}$ является неприводимым проективным многообразием. Тогда G является абелевым многообразием.*

Доказательство. Мы приведем только план доказательства этой теоремы.

1-ый шаг. Доказываем коммутативность группы G. Для этого рассмотрим прямое произведение $G_1 \times G_2 \times G_3$, где $G_i = G$, и его подмногообразие $X = \{(g_1, g_2, g_3) \mid g_3 = g_1 g_2 g_1^{-1}\}$. Имеем:

(1) X неприводимо, так как X есть образ морфизма
$$\varphi : G_1 \times G_2 \to G_1 \times G_2 \times G_3, \qquad (g_1, g_2) \mapsto (g_1, g_2, g_1 g_2 g_1^{-1}).$$

(2) $q(p(X)) = G_2$, где
$$p : G_1 \times G_2 \times G_3 \to G_2 \times G_3, \qquad q : G_2 \times G_3 \to G_2$$
- канонические проекции. Это очевидно: для $g_2 \in G_2$ имеем : $q(p(e, g_2, g_2)) = g_2$.

(3) Рассмотрим $q|_{p(X)}$. Ясно, что $q^{-1}(e) \cap p(X) = \{(e, e)\}$. Отсюда и из (2) следует, что $\dim(p(X)) = \dim(G)$.

(4) Для $g_1 \in G$ положим $X(g_1) = \{(g_2, g_1 g_2 g_1^{-1}) \mid g_2 \in G\} \subset G_2 \times G_3$. Ясно, что $X(g_1) \simeq G$ и $X(g_1) \subset p(X)$. Следовательно, $X(g_1) = p(X)$ для всех $g_1 \in G$.

(5) $X(g_1) = p(X) = X(e)$ и, следовательно, $g_1 g_2 = g_2 g_1$ для любых $g_1, g_2 \in G$.

2-ой шаг. Используя теорию групп Ли, доказываем, что G изоморфна $\mathbb{C}^n/\Lambda$, где Λ - полная решетка в $\mathbb{C}^n$. $\square$

Следующая структурная теорема, которую мы приводим без доказательства, описывает в общих чертах алгебраические группы над $\mathbb{C}$.

Теорема 13.5. *Пусть* $\mathsf{k} = \mathbb{C}$.

(1) *Предположим, что G - алгебраическая группа; тогда существует точная последовательность гомоморфизмов алгебраических групп*
$$\mathbf{1} \to G_{\boldsymbol{LAG}} \to G \to G_{\boldsymbol{Ab}} \to \mathbf{1},$$
где $G_{\boldsymbol{LAG}}$ - линейная алгебраическая группа, $G_{\boldsymbol{Ab}}$ - абелево многообразие.

(2) *Предположим, что $G_{\boldsymbol{LAG}}$ - линейная алгебраическая группа; тогда существует единственная точная последовательность гомоморфизмов алгебраических групп*
$$\mathbf{1} \to G_{\boldsymbol{IrrLAG}} \to G_{\boldsymbol{LAG}} \to G_{\boldsymbol{Fin}} \to \mathbf{1},$$
где $G_{\boldsymbol{IrrLAG}}$ - связная ($\Leftrightarrow$ неприводимая) линейная алгебраическая группа, $G_{\boldsymbol{Fin}}$ - конечная группа.

(3) *Предположим, что $G_{\boldsymbol{IrrLAG}}$ - связная линейная алгебраическая группа; тогда существует единственная точная последовательность гомоморфизмов алгебраических групп*
$$\mathbf{1} \to G_{\boldsymbol{Un}} \to G_{\boldsymbol{IrrLAG}} \to G_{\boldsymbol{Red}} \to \mathbf{1},$$
где $G_{\boldsymbol{Un}}$ - унипотентная линейная алгебраическая группа, $G_{\boldsymbol{Red}}$ - редуктивная линейная алгебраическая группа.

14. Линейные алгебраические группы

Начиная с этого места мы рассматриваем только линейные алгебраические группы.

Пусть G - линейная алгебраическая группа.

Лемма 14.1. *Связная компонента единицы G^0 группы G является нормальной в G подгруппой.*

Доказательство. Для $g \in G$ рассмотрим связную подгруппу gG^0g^{-1}. Так как $e \in gG^0g^{-1}$, то $gG^0g^{-1} \subset G^0$ и, следовательно, $gG^0g^{-1} = G^0$. □

Лемма 14.2. *Пусть H - подгруппа группы G. Тогда $\overline{H}$ является алгебраической подгруппой в G.*

Доказательство. Пусть $g_1, g_2 \in \overline{H}$. Докажем, что $g_1g_2 \in \overline{H}$.

Сначала рассмотрим частный случай, когда $g_1 \in H$. Мы должны доказать, что если $g_2 \in \overline{H}$ и $f \in \mathsf{k}[G]$, где $f|_H = 0$, то $f(g_1g_2) = 0$. Рассмотрим морфизм

$$\varphi_1 : G \to G, \qquad g \mapsto g_1g.$$

Так как $g_1 \in H$, то $\varphi_1(H) = H$ и, следовательно, $\varphi_1^*(f)|_H = 0$. Имеем: $0 = \varphi_1^*(f)(g_2) = f(\varphi_1(g_2)) = f(g_1g_2)$.

Рассмотрим общий случай. Мы должны доказать, что если $g_1, g_2 \in \overline{H}$ и $f \in \mathsf{k}[G]$, где $f|_H = 0$, то $f(g_1g_2) = 0$. Рассмотрим морфизм

$$\varphi_2 : G \to G, \qquad g \mapsto gg_2.$$

Из разобранного частного случая следует, что $\varphi_2(H) \subset \overline{H}$. Следовательно, $\varphi_2^*(f)|_H = 0$, откуда получаем $0 = \varphi_2^*(f)(g_1) = f(g_1g_2)$.

Доказательство того, что если $g \in \overline{H}$, то $g^{-1} \in \overline{H}$ аналогично. □

Задача 14.3. *Пусть H - подгруппа в G, причем H (как подмножество в G) конструктивно. Доказать, что тогда H замкнуто в G, т.е., H является алгебраической подгруппой в G.*

Из утверждения этой задачи и следствия 5.5 следует, что если $\mathsf{k} = \mathbb{C}$, $\varphi : S \to G$ - гомоморфизм алгебраических групп, то $\varphi(S)$ является алгебраической подгруппой в G.

Задача 14.4. *Доказать, что коммутант $[G, G]$ линейной алгебраической группы является алгебраической подгруппой в G, причем если группа G связна, то и коммутант $[G, G]$ связен.*

Действие $G : X$ алгебраической группы G на квазипроективном многообразии X называется *регулярным*, если морфизм действия

$$\mu : G \times X \to X, \qquad (g, x) \mapsto g \cdot x \tag{14.1}$$

является морфизмом квазипроективных многообразий.

Задача 14.5. *Пусть $G : X$ - регулярное действие алгебраической группы G на квазипроективном многообразии X, X_0 - G-орбита минимальной размерности. Доказать, что X_0 замкнуто в X.*

Представление алгебраической группы - это представление и регулярное действие одновременно. Например, регулярное действие $G : X$ на аффинном многообразии определяет представление

$$G\colon \mathsf{k}[X], \qquad (g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x).$$

Бесконечномерное представление $G : W$ называется *локально конечным*, если $\dim\langle G\cdot w\rangle < \infty$ для всех $w \in W$.

Лемма 14.6. *Пусть $G : X$ - регулярное действие на аффинном многообразии X. Тогда представление $G : \mathsf{k}[X]$ локально конечно.*

Доказательство. Рассмотрим морфизм действия (14.1). Определим действие

$$G : G \times X, \qquad g_1 \cdot (g, x) = (g_1 g, x)$$

Тогда μ является G-эквивариантным морфизмом. Следовательно,

$$\mu^* : \mathsf{k}[X] \to \mathsf{k}[G \times X] \simeq \mathsf{k}[G] \otimes \mathsf{k}[X]$$

является линейным G-отображением. Пусть

$$\mu^*(f)(g, x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} h_i(g) f_i(x).$$

Тогда

$$\mu^*(g_1 \cdot f)(g, x) = g_1 \cdot \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} h_i(g) f_i(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} h_i(g_1^{-1} g) f_i(x).$$

Подставляя $g = e$, получаем

$$(g_1 \cdot f)(x) = \mu^*(g_1 \cdot f)(e, x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} h_i(g_1^{-1}) f_i(x).$$

Следовательно,

$$\langle G \cdot f \rangle \subset \langle f_1, \ldots, f_n \rangle.$$

□

Задача 14.7. *Доказать, что для любой линейной алгебраической группы существует точное конечномерное представление.*

Теорема 14.8. *Пусть H - алгебраическая подгруппа линейной алгебраической группы G. Тогда*

- *G/H обладает структурой неособого квазипроективного многообразия при которой отображение $G \to G/H$ является морфизмом квазипроективных многообразий и действие $G : G/H$ является регулярным действием.*
- *Если подгруппа H нормальна, то группа G/H обладает структурой линейной алгебраической группы при которой гомоморфизм групп $G \to G/H$ является гомоморфизмом алгебраических групп.*

Доказательство этой теоремы - техническое. Мы не будем его приводить.

15. Унипотентные группы

Рассмотрим *экспоненциальное* отображение

$$\exp : \mathbf{gl}(m, \mathsf{k}) \to \mathbf{GL}(m, \mathsf{k}),$$

где

$$\exp(B) = \mathbf{E} + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \ldots$$

и отображение

$$\log : U_{\log} \to \mathbf{gl}(m, \mathsf{k}),$$

где

$$\log(B) = \frac{(B-\mathbf{E})}{1} - \frac{(B-\mathbf{E})^2}{2} + \frac{(B-\mathbf{E})^3}{3} - \ldots, \tag{15.1}$$

$U_{\log} \subset \mathbf{GL}(m, \mathsf{k})$ - открытое (в классической топологии) подмножество, состоящее из таких матриц B, что ряд (15.1) сходится.

Замечание 15.1. Ясно, что $\exp(\mathbf{gl}(m, \mathsf{k}))$ лежит в связной компоненте $\mathbf{GL}(m, \mathsf{k})^0$ единицы. Несложно проверить, что

- $\exp(\mathbf{gl}(m, \mathbb{C})) = \mathbf{GL}(m, \mathbb{C})^0 = \mathbf{GL}(m, \mathbb{C})$;
- $$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin \exp(\mathbf{gl}(m, \mathbb{R}))$$
  и, следовательно, $\exp(\mathbf{gl}(m, \mathbb{R})) \neq \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})^0$.

Задача 15.2. *Доказать, что*

(1) $\exp \circ \log = \mathbf{id}_{U_{\log}}$,
(2) $\log \circ (\exp|_{\log(U_{\log})}) = \mathbf{id}_{\log(U_{\log})}$.

Определение 15.3. Элемент $A \in \mathbf{GL}(m, \mathsf{k})$ называется *унипотентным*, если все собственные значения матрицы A равны 1. Подгруппа группы $\mathbf{GL}(m, \mathsf{k})$ называется *унипотентной*, если всякий элемент этой подгруппы унипотентен. Элемент $a \in \mathbf{gl}(m, \mathsf{k})$ называется *нильпотентным*, если $a^n = 0$ для некоторого n.

Пусть $N(m, \mathsf{k}) \subset \mathbf{GL}(m, \mathsf{k})$ - подмножество унипотентных элементов, $\mathfrak{n}(m, \mathsf{k}) \subset \mathbf{gl}(m, \mathsf{k})$ - подмножество нильпотентных элементов. Очевидно, $N(m, \mathsf{k})$ и $\mathfrak{n}(m, \mathsf{k})$ являются аффинными многообразиями.

Имеем морфизмы аффинных многообразий

$$\exp^{[m]} : \mathbf{gl}(m, \mathsf{k}) \to \mathbf{GL}(m, \mathsf{k}), \quad B \mapsto \mathbf{E} + \frac{B}{1!} + \ldots + \frac{B^m}{m!};$$
$$\log^{[m]} : \mathbf{GL}(m, \mathsf{k}) \to \mathbf{gl}(m, \mathsf{k}), \quad B \mapsto \frac{(B-\mathbf{E})}{1} - \ldots - (-1)^m \frac{(B-\mathbf{E})^m}{m}.$$

Рассмотрим морфизмы

$$\exp^{[m]}|_{\mathfrak{n}(m,\mathsf{k})} : \mathfrak{n}(m, \mathsf{k}) \to N(m, \mathsf{k}),$$
$$\log^{[m]}|_{N(m,\mathsf{k})} : N(m, \mathsf{k}) \to \mathfrak{n}(m, \mathsf{k}).$$

Задача 15.4. *Доказать, что*

(1) $(\exp^{[m]}|_{\mathfrak{n}(m,\mathsf{k})}) \circ (\log^{[m]}|_{N(m,\mathsf{k})}) = \mathbf{id}|_{N(m,\mathsf{k})}$;
(2) $(\log^{[m]}|_{N(m,\mathsf{k})}) \circ (\exp^{[m]}|_{\mathfrak{n}(m,\mathsf{k})}) = \mathbf{id}|_{\mathfrak{n}(m,\mathsf{k})}$.

Другими, словами, морфизмы $\exp^{[m]}|_{\mathfrak{n}(m,\mathsf{k})}$ *и* $\log^{[m]}|_{N(m,\mathsf{k})}$ *являются обратными друг к другу изоморфизмами.*

Для элемента g линейной алгебраической группы G через $G(g)$ мы обозначаем наименьшую алгебраическую подгруппу группы G содержащую g.

Задача 15.5. *Пусть* $A \in \mathbf{GL}(m, \mathsf{k})$ *- унипотентный элемент. Доказать, что*

(1) $G(A) = \{\exp^{[m]}(t \log^{[m]}(A)) \mid t \in \mathsf{k}\}$;
(2) *всякий элемент подгруппы* $G(A)$ *унипотентен;*

(3) *в $G(A)$ нет нетривиальных алгебраических подгрупп.*

Лемма 15.6. *Предположим, что G - унипотентная подгруппа в $\mathbf{GL}(m, \mathsf{k})$, тогда $\mathfrak{g} = \log^{[m]}(G)$ является линейным подпространством в $\mathbf{gl}(m, \mathsf{k})$. В частности, G (как многообразие) изоморфно векторному пространству.*

Доказательство. Действительно, $\mathfrak{g}$ является коническим (согласно утв. задачи 15.5), неособым (согласно задаче 15.4, $\mathfrak{g}$ изоморфно G) аффинным подмногообразием в $\mathbf{gl}(m, \mathsf{k})$. Теперь лемма вытекает из утв. следующей задачи.

Задача 15.7. *Доказать, что всякое коническое, неособое аффинное подмногообразие в k^n является линейным подпространством.*

Лемма 15.8. *Предположим, что G - коммутативная унипотентная подгруппа в $\mathbf{GL}(m, \mathsf{k})$; тогда G (как линейная алгебраическая группа) изоморфна векторному пространству $\mathsf{k}^{\dim(G)}$.*

16. Алгебраические торы

В этом параграфе основное поле $\mathsf{k} = \mathbb{C}$.

Определение 16.1. Элемент $A \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{C})$ называется *полупростым*, если жорданова нормальная форма матрицы A является диагональной матрицей (в это случае говорят, что матрица A *диагонализируема*). *Алгебраический тор* - это линейная алгебраическая группа, изоморфная группе вида

$$\mathbf{T}^n = \mathbb{C}^* \times ... \times \mathbb{C}^* \qquad \text{(n прямых сомножителей)}.$$

Алгебраический квазитор - это линейная алгебраическая группа, изоморфная группе вида $\mathbf{T}^n \times \Gamma$, где Γ - конечная коммутативная группа.

Задача 16.2. *Доказать, что в торе $\mathbf{T}^n$ существует элемент g такой, что $\overline{G(g)} = \mathbf{T}^n$ (замыкание в топологии Зарисского).*

Задача 16.3. *Доказать, что в квазиторе элементы конечного порядка плотны в топологии Зарисского.*

Задача 16.4. *Доказать, что всякое представление квазитора изоморфно прямой сумме одномерных представлений. В частности, алгебраическая подгруппа $G \subset \mathbf{GL}(m, \mathbb{C})$ является квазитором тогда и только тогда, когда G сопряжена подгруппе группы диагональных матриц.*

Фиксируем алгебраический тор

$$\mathbf{T}^n = \{z = (z_1, ..., z_n) \mid z_i \in \mathbb{C}^*\}.$$

Характер алгебраического тора $\mathbf{T}^n$ - это гомомофизм алгебраических групп $\mathbf{T}^n \to \mathbb{C}^*$. Ясно, что множество характеров образуют абелеву группу по умножению (которую обозначают через $\mathfrak{X}(\mathbf{T}^n)$).

Задача 16.5. *Пусть $a = (a_1, , , , , a_n) \in \mathbb{Z}^n$, тогда*

$$\chi_a : \mathbf{T}^n \to \mathbb{C}^*, \qquad z \mapsto \chi_a(z) = z_1^{a_1} \cdot ... \cdot z_n^{a_n}$$

является характером алгебраического тора $\mathbf{T}^n$. Всякий характер алгебраического тора $\mathbf{T}^n$ имеет вид χ_a, где $a = \in \mathbb{Z}^n$.

Таким образом, группа $\mathfrak{X}(\mathbf{T}^n)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}^n$.

Задача 16.6. *Доказать, что всякий автоморфизм алгебраического тора $\mathbf{T}^n$ имеет вид*

$$\varphi : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n, \qquad z \mapsto (\varphi_1(z), ..., \varphi_n(z))$$

где $\varphi_1, ..., \varphi_n$ - образующие абелевой группы $\mathfrak{X}(\mathbf{T}^n)$.

Задача 16.7. (1) *Пусть $\Gamma \subset \mathfrak{X}(\mathbf{T})$ - подгруппа группы характеров алгебраического тора $\mathbf{T}$. Доказать, что*

$$\mathbf{T}^\Gamma = \{x \in \mathbf{T} \mid \chi(x) = 1 \text{ для всех } \chi \in \Gamma\}$$

является подгруппой алгебраического тора $\mathbf{T}$.

(2) *Пусть $H \subset \mathbf{T}$ - подгруппа алгебраического тора $\mathbf{T}$. Тогда $H = \mathbf{T}^\Gamma$ для некоторой подгруппы $\Gamma \subset \mathfrak{X}(\mathbf{T})$.*

Задача 16.8. *Доказать, что алгебраическая подгруппа квазитора является квазитором. Доказать, что факторгруппа квазитора по алгебраической подгруппе является квазитором.*

Задача 16.9. *Пусть элемент $A \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{C})$ полупрост. Тогда $G(A)$ есть квазитор.*

17. Разложение Жордана

В этом параграфе основное поле $\mathsf{k} = \mathbb{C}$.

Пусть $g \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{C})$. *Мультипликативное разложение Жордана* элемента g - это разложение $g = g_u g_s$, где g_u унипотентен, g_s полупрост и $g_u g_s = g_s g_u$.

Задача 17.1. *Доказать, что мультипликативное разложение Жордана существует и единственно.*

Задача 17.2. *Пусть $g \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{C})$, $g = g_u g_s$ - мультипликативное разложение Жордана. Доказать, что*

(1) *$G(g_u) \cap G(g_s) = \{e\}$.*
(2) *Элементы групп $G(g_u)$ и $G(g_s)$ коммутируют.*

Согласно утв. этой задачи, отображение

$$\mu\colon G(g_u) \times G(g_s) \to G(g_u) \cdot G(g_s), \qquad (h', h'') \mapsto h'h''$$

является изоморфизмом групп.

Лемма 17.3. *Пусть $g \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{C})$, $g = g_u g_s$ - мультипликативное разложение Жордана. Тогда $G(g) = G(g_u) \cdot G(g_s)$.*

Доказательство. Имеем: $G(g) \subset G(g_u) \cdot G(g_s)$. Рассмотрим

$$G(g)' := \mu^{-1}(G(g)) \subset G(g_u) \times G(g_s).$$

Мы должны доказать, что

$$G(g)' = G(g_u) \times G(g_s). \tag{17.1}$$

Пусть

$$p_s : G(g)' \to G(g_s)$$

- ограничение на $G(g)'$ канонической проекции $G(g_u) \times G(g_s) \to G(g_s)$,

$$p_u : G(g)' \to G(g_u)$$

- ограничение на $G(g)'$ канонической проекции $G(g_u) \times G(g_s) \to G(g_u)$.

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{Ker}(p_s) = \{e\}$. В этом случае $G(g)' \simeq G(g) \simeq p_s(G(g)) \subset G(g_s)$. Из утверждения задачи 16.8 следует, что $G(g)$ есть квазитор. Следовательно, $p_u(G(g)) = \{e\}$. Отсюда вытекает, что $g_u = e$, $g = g_s$. Ясно, что в этом случае выполнено (17.1).

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{Ker}(p_s) \neq \{e\}$. Так как в $G(g_u)$ нет нетривиальных алгебраических подгрупп, то $\mathbf{Ker}(p_s) = \{e\} \times G(g_u)$. Отсюда вытекает, что $G(g)' = G(g_u) \times G(g_s)$.

Теорема 17.4. *Пусть $G \subset \mathbf{GL}(m, \mathbb{C})$ - линейная алгебраическая группа, $\varphi\colon G \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ - гомоморфизм алгебраических групп. Доказать, что для любого элемента $g \in G$ выполнено $\varphi(g_s) = \varphi(g)_s$ и $\varphi(g_u) = \varphi(g)_u$.*

Следствие 17.5. *Пусть G - линейная алгебраическая группа, $g \in G$, $\varphi\colon G \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ - вложение алгебраических групп. Тогда, если $\varphi(g)$ полупрост (соотв. унипотентен), то $\psi(g)$ полупрост (соотв. унипотентен) для любого гомоморфизма $\psi\colon G \to \mathbf{GL}(m, \mathbb{C})$ алгебраических групп.*

Определение 17.6. Пусть G - линейная алгебраическая группа. Элемент $g \in G$ называется *полупростым* (соотв. *унипотентным*), если $\varphi(g)$ полупрост (соотв. унипотентен) для некоторого вложения $\varphi\colon G \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ алгебраических групп. (В следствии 17.5 утверждается, что в этом случае $\psi(g)$ будет полупрост (соотв. унипотентен) для любого гомоморфизма $\psi\colon G \to \mathbf{GL}(m, \mathbb{C})$ алгебраических групп.)

18. Связные разрешимые линейные алгебраические группы

В этом параграфе основным полем считается поле $\mathbb{C}$.

Задача 18.1. *Пусть G - коммутативная связная разрешимая алгебраическая группа. Доказать, что $G \simeq (\mathbb{C}^*)^n \times \mathbb{C}^m$ (прямое произведение тора $(\mathbb{C}^*)^n$ и векторного пространства $\mathbb{C}^m$).*

Теорема 18.2. *Пусть G - связная разрешимая алгебраическая группа, H - алгебраическая подгруппа группы G. Если однородное пространство G/H является проективным многообразием, то $G/H = \mathbf{pt}$ (= точка).*

Доказательство. Доказываем индукцией по $\dim(G)$.

В случае $\dim(G) = 1$ теорема следует из утв. задачи 18.1.

В случае $\dim(G) > 1$ из утв. задач 14.4 и 18.1 следует, что в G существует связная алгебраическая нормальная подгруппа G' такая, что $1 \leqslant \dim(G') < \dim(G)$. Очевидно, группа G' разрешима. Имеем регулярное действие

$$G \ : \ G/H, \qquad g_1 \cdot (gH) = g_1 gH. \tag{18.1}$$

Рассмотрим ограничение действия (18.1) на G':

$$G' \ : \ G/H, \qquad g' * (gH) = g' gH. \tag{18.2}$$

Пусть $X_0 \subset G/H$ есть G'-орбита минимальной размерности для действия (18.2). Тогда X_0 замкнута (задача 14.5). Из предположения индукции следует, что X_0 есть точка (обозначим ее x_0). Имеем: $g \cdot x_0 = x_0$ для любого $g \in G'$.

Заметим, что $G \cdot x_0 = G/H$. Определим регулярное действие

$$G/G' \;:\; G/H, \qquad (gG') \star (g_1 \cdot x_0) = (gg_1) \cdot x_0.$$

По построению, $(G/G') \star x_0 = G/H$. Так как факторгруппа G/G' разрешима, то (по индукции) $G/H = \mathbf{pt}$. □

Следствие 18.3 (теорема Бореля)**.** *Для всякого регулярного действия $G : X$ связной разрешимой алгебраической группы G на проективном многообразии X существует неподвижная точка.*

Доказательство. Действительно, пусть $X_0 \subset X$ - орбита минимальной размерности. Тогда X_0 замкнуто в X (задача 14.5) и, следовательно, является проективным многообразием. Из теоремы 18.2 следует, что $X_0 = \mathbf{pt}$. □

Следствие 18.4. *Пусть $G \subset \mathbf{GL}(m, \mathbb{C})$ - связная разрешимая подгруппа. Тогда G сопряжена подгруппе $\mathbf{B}^{+}(m, \mathbb{C})$ верхнетреугольных невырожденных матриц.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}_m$ - многообразие (полных) флагов в $\mathbb{C}^m$. Группа $\mathbf{GL}(m, \mathbb{C})$ естественным образом действует на $\mathcal{F}_m$. Пусть $G : \mathcal{F}_m$ - ограничение этого действия на подгруппу G. Так как $\mathcal{F}_m$ - проективное многообразие, то, по теореме Бореля, существует флаг $\mathfrak{f} \in F_m$ такой, что $G \cdot \mathfrak{f} = \mathfrak{f}$. Пусть

$$\mathfrak{f} = \{\langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \ldots \langle e_1, e_2, \ldots, e_m \rangle\}$$

где $e_1, e_2, \ldots, e_m$ - базис в $\mathbb{C}^m$. Очевидно, в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_m$ элементы группы G записываются верхнетреугольными матрицами. □

Задача 18.5. *Пусть G - связная разрешимая группа. Доказать, что подмножество U унипотентных элементов группы G образует подгруппу. (Эта подгруппа называется* унипотентным радикалом *группы G).*

Задача 18.6. *Пусть G - связная разрешимая группа. Доказать, что подгруппа U является унипотентным радикалом тогда и только тогда, когда U унипотентна, нормальна и факторгруппа G/U является алгебраическим тором.*

Теорема 18.7. *Пусть G - связная разрешимая группа, $U \subset G$ - унипотентный радикал, $\pi \colon G \to G/U =: T$ - (сюръективный) гомоморфизм факторизации. Тогда существует гомоморфизм $j \colon T \to G$ такой, что $\pi \circ j = \mathbf{id}_T$.*

Таким образом, всякая связная разрешимая группа G разлагается в полупрямое произведение: $G \simeq T \leftthreetimes U$, где U - унипотентный радикал, T - алгебраический тор.

19. Редуктивные группы

Определение 19.1. Пусть G - произвольная группа. Представление $G \colon V$ называется *вполне приводимым*, если для любого инвариантного подпространства $V' \subset V$ существует инвариантное дополнение.

Всякое вполне приводимое представление разлагается (не единственныи образом) в прямую сумму неприводимых подпредставлений. Ясно, что прямое слагаемое вполне приводимого G-модуля вполне приводимо.

Определение 19.2. Линейная алгебраическая группа G над k называется *редуктивной*, если всякое ее представление над k вполне приводимо.

Например, всякая конечная группа редуктивна.

В этом параграфе мы опишем три приема, с помощью которых можно устанавливать редуктивность некоторых линейных алгебраических групп.

Первый прием: инвариантное интегрирование.

Нам понадобятся плотности на дифференцируемых многообразиях. *Плотность* $d\rho$ на многообразии S - это мера, которая локально в карте $X \subset S$ с координатами $x = (x^1, \ldots, x^n)$ имеет вид $\rho_X(x)dx^1 \ldots dx^n$, где $\rho_X\colon X \to \mathbb{R}_+$ - дифференцируемая функция. Очевидно, для функций ρ_X, ρ_Y выполнено правило перехода:

$$\rho_Y(y(x)) = \left|\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right| \rho_X(x).$$

Если $\varphi\colon R \to S$ - открытое вложение многообразий, $d\rho$ - плотность на S, то на R очевидным образом определена плотность $\varphi^* d\rho$. Если $d\rho$ - плотность на компактном многообразии S, то для всякой векторнозначной функции $F\colon S \to V$, где V - вещественное или комплексное пространство, определен ее интеграл

$$\int_S F(s) d\rho(s) \ \in \ V.$$

Определение 19.3. Плотность $d\rho$ на вещественной алгебраической группе G называется *левоинвариантной* (соотв. *правоинвариантной*), если для любого $g \in G$ выполнено $l_g^* d\rho = d\rho$ (соотв. $r_g^* d\rho = d\rho$), где

$$l_g\colon G \to G, \qquad h \mapsto gh$$

- левый сдвиг,

$$r_g\colon G \to G, \qquad h \mapsto hg$$

- правый сдвиг. Плотность $d\rho$ называется *инвариантной*, если она одновременно лево- и право- инвариантна.

Задача 19.4. *Доказать, что на всякой вещественной алгебраической группе G существует единственная, с точностью до ненулевого постоянного множителя, левоинвариантная (соотв. правоинвариантная) плотность $d\rho_l$ (соотв. $d\rho_r$).*

Лемма 19.5. *На компактной вещественной алгебраической группе всякая левоинвариантная плотность правоинвариантна.*

Доказательство. Пусть $d\rho_l$ - левоинвариантная плотность. Нетрудно заметить, что для любого $g \in G$ плотность $r_g^* d\rho_l$ левоинвариантна. Согласно утверждению задачи 19.4, имеем $r_g^* d\rho_l = \varphi(g) d\rho_l$, где $\varphi(g) \in \mathbb{R}_+$. Нетрудно увидеть, что отображение

$$\varphi'\colon G \to \mathbb{R}_+, \qquad g \mapsto \varphi(g^{-1})$$

является гомоморфизмом групп. Следовательно, $\varphi'(G)$ является компактной подгруппой в $\mathbb{R}_+$. Очевидно, такой подгруппой может быть только тривиальная (состоящая только из нейтрального элемента) подгруппа. Следовательно, $\varphi'(g) \equiv 1$ и, значит, плотность $d\rho_l$ правоинвариантна. $\square$

Следствие 19.6. *На компактной вещественной алгебраической группе существует инвариантная плотность.*

Заметим, что всякую комплексную линейную алгебраическую группу G можно рассматривать как вещественную линейную алгебраическую группу (в этом случае обозначаем ее $G_{\mathbb{R}}$).

Для произвольных групп определены вещественные и комплексные представления. Для вещественных алгебраических групп также можно определить вещественные и комплексные представления. А именно, вещественное представление $G\colon V$ вещественной алгебраической группы соответствует гомоморфизму алгебраических групп $G \to \mathbf{GL}(V)$, где V - вещественное пространство. Комплексное представление $G\colon V$ вещественной алгебраической группы соответствует гомоморфизму алгебраических групп $G \to \mathbf{GL}(V)_{\mathbb{R}}$, где V - комплексное пространство.

Теорема 19.7. *Все вещественные и комплексные представления компактной вещественной алгебраической группы вполне приводимы.*

Доказательство. Пусть G - вещественная алгебраическая группа, $G\colon V$ - представление (вещественное или комплексное), $V' \subset V$ - инвариантное подпространство. Мы должны построить инвариантное дополнение. Пусть $p\colon V \to V$ - произвольный проектор на подпространство V'. Рассмотрим его усреднение

$$p^{\natural}\colon V \to V, \qquad v \mapsto \frac{\int_G (g \cdot p) d\rho(g)}{\int_G d\rho(g)},$$

где $d\rho$ - инвариантная плотность на G. Нетрудно заметить, что $p^{\natural}$ является проектором на подпространство V', причем $p^{\natural}$ коммутирует с действием группы G. Следовательно, $V'' := \mathbf{Ker}(p^{\natural})$ является инвариантным дополнением к V'. □

Таким образом, редуктивными являются группы $\mathbf{U}_n$ и $\mathbf{SU}_n$.

Второй прием: унитарный трюк Вейля.

Теорема 19.8. *Пусть G - комплексная линейная алгебраическая группа, причем $G_{\mathbb{R}}$ содержит компактную алгебраическую подгруппу K, такую что $G = \overline{K}$ (замыкание в топологии Зарисского в G). Тогда группа G редуктивна.*

Доказательство. Пусть $G\colon V$ - представление алгебраической группы G. Рассмотрим ограничение $K\colon V$ этого представления на подгруппу K. Представление $K\colon V$ является комплексным представлением вещественной алгебраической группы K. Согласно теореме 19.7, представление $K\colon V$ вполне приводимо. Разложим K-модуль V в прямую сумму неприводимых подмодулей:

$$V = V_1 \dotplus V_1 \dotplus \ldots \dotplus V_m. \tag{19.1}$$

Нетрудно заметить, что (19.1) является также разложением G-модуля V в прямую сумму неприводимых подмодулей. □

Задача 19.9. *Доказать, что $\overline{\mathbf{U}_n} = \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ и $\overline{\mathbf{SU}_n} = \mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$.*

Из теоремы 19.8 и утверждений задачи 19.9 следует, что группы $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ и $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ редуктивны.

Третий прием: комплексификация.

Рассмотрим аффинное многообразие X над k и пусть $\mathsf{k} \subset L$ - расширение полей. Очевидным образом аффинное многообразие X можно рассматривать как аффинное многообразие над L (в этом случае обозначаем его X_L). Как множество X является подмножеством множества X_L. Всякий морфизм $\varphi\colon X \to Y$ очевидным образом определяет морфизм $\varphi_L\colon X_L \to Y_L$. При этом φ есть изоморфизм тогда и только тогда, когда φ_L есть изоморфизм. Если $G = G$ - линейная алгебраическая группа определенная над k, то (аффинное многообразие) G_L является линейной алгебраической группой определенной над L. Всякое представление алгебраической группы G в пространстве V определяет представление алгебраической группы G_L в пространстве $V \otimes_{\mathsf{k}} L$. Если $\mathsf{k} = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{C}$, G - вещественная алгебраическая группа, то группа $G_{\mathbb{C}}$ называется *комплексификацией* группы G.

Задача 19.10. *Пусть G - вещественная линейная алгебраическая группа, $G_{\mathbb{C}}$ - ее комплексификация. Доказать, что $G_{\mathbb{C}} = \overline{G}$ (замыкание в топологии Зарисского в $G_{\mathbb{C}}$).*

Пример 19.11. Комплексификацией групп $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ и $\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$ являются соответственно группы $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ и $\mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$.

Теорема 19.12. *Пусть G - линейная алгебраическая группа над $\mathbb{R}$, $G_{\mathbb{C}}$ - ее комплексификация. Имеем: G редуктивна тогда и только тогда, когда $G_{\mathbb{C}}$ редуктивна.*

Таким образом, редуктивными являются группы $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ и $\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$.

Теорема 19.12 является следствием следующей леммы.

Лемма 19.13. *Пусть G - произвольная группа. Тогда*

(1) *вещественное представление $G\colon V$ вполне приводимо $\Longleftrightarrow$ его комплексификация $G\colon V\otimes\mathbb{C}$ вполне приводима;*
(2) *комплексное представление $G\colon U$ вполне приводимо $\Longleftrightarrow$ его овеществление $G\colon U_{\mathbb{R}}$ вполне приводимо.*

Доказательство. Мы будем использовать факты, приведенные в Дополнении 2.

(1) $\Longrightarrow$. Пусть $W \subset V\otimes\mathbb{C}$ - неприводимое инвариантное подпространство. Тогда $W + \overline{W} = V'\otimes\mathbb{C}$, где $V' = (W + \overline{W}) \cap V$. Пусть V'' - инвариантное дополнение к V' в V. Тогда мы имеем следующее разложение G-модуля

$$V\otimes\mathbb{C} = \begin{cases} W \dotplus \overline{W} \dotplus V''\otimes\mathbb{C}, & \text{если } W \neq \overline{W},\\ W \dotplus V''\otimes\mathbb{C}, & \text{если } W = \overline{W}. \end{cases}$$

(1) $\Longleftarrow$. Пусть $V' \subset V$ - неприводимое инвариантное подпространство. Возьмем инвариантный $\mathbb{C}$-линейный проектор

$$p\colon V\otimes\mathbb{C} \to V\otimes\mathbb{C}$$

на комплексное подпространство $V'\otimes\mathbb{C}$. Рассмотрим

$$p^{\mathrm{conj}}\colon V\otimes\mathbb{C} \to V\otimes\mathbb{C}, \qquad w \mapsto \frac{1}{2}\left(p(w) + \overline{p(\overline{w})}\right)$$

(усреднение проектора p по группе $\{1, \overline{\cdot}\}$). Тогда p^{conj} является $\mathbb{C}$-линейным инвариантным проектором на подпространство $V'\otimes\mathbb{C}$, причем p^{conj} коммутирует с сопряжением. Рассмотрим $W = \mathbf{Ker}(p^{\mathrm{conj}})$. Тогда W является инвариантным дополнением к $V'\otimes\mathbb{C}$, причем $W = \overline{W}$. Имеем: $W = V''\otimes\mathbb{C}$. Нетрудно заметить, что V'' является инвариантным дополнением к V' в V.

(2) $\Longrightarrow$. Согласно уже доказанному утв. (1), достаточно доказать, что G-модуль $(U_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ вполне приводим. А это следует из разложения (25.1) в котором оба прямых слагаемых вполне приводимы (так как одно из них изоморфно U, а другое антиизоморфно U).

(2) $\Longleftarrow$. Из уже доказанного утв. (1), следует, что G-модуль $(U_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ вполне приводим. G-модуль U приводим так как он изоморфен G-модулю $(U_{\mathbb{R}})'_{\mathbb{C}}$ который является прямым слагаемым G-модуля $(U_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$. $\square$

Имеется полное описание всех редуктивных линейных алгебраических групп в терминах *систем корней*. В частности, редуктивными являются все *классические группы*. По определению, классические группы - это группы $\mathbf{GL}(n, \mathsf{k})$, $\mathbf{SL}(n, \mathsf{k})$, $\mathbf{Sp}(2n, \mathsf{k})$ (где $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), $\mathbf{U}_n$, $\mathbf{SU}_n$, $\mathbf{O}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{O}(p, q)$ и $\mathbf{SO}(p, q)$ и их факторы по подгруппам центра. Например, $\mathbf{PGL}(n, \mathsf{k}) := \mathbf{GL}(n, \mathsf{k})/\mathsf{k}^*$ является классической группой.

Глава 3. **Теория инвариантов**

20. Категорный фактор

Пусть $G\colon X$ - регулярное действие линейной алгебраической группы G на аффинном многообразии X. Рассмотрим множество $\frac{X}{G}$ орбит этого действия. Грубо говоря, основная задача теории теория инвариантов - исследование $\frac{X}{G}$ методами алгебраической геометрии. Первое, что приходит в голову - попробовать определить на $\frac{X}{G}$ структуру аффинного многообразия так, чтобы отображение множеств

$$X \to \frac{X}{G}, \qquad x \mapsto \{Gx\} \tag{20.1}$$

было морфизмом аффинных многообразий. Однако в общем случае это невозможно. Например, если

$$G = \mathsf{k}^*\colon X = \mathsf{k}^1, \qquad t \cdot v = tv,$$

то $\frac{X}{G}$ состоит их двух точек (а именно, $\{0\}$ и $\mathsf{k}^1 \backslash \{0\}$) и (20.1) не является морфизмом.

Плодотворной оказалась идея определить категорный фактор. По определению, *категорный фактор* для действия $G\colon X$ - это пара $(X/G, \pi)$, где X/G - аффинное многообразие,

$$\pi\colon X \to X/G$$

- морфизм (называемый *морфизмом факторизации*) такие, что

- (*постоянство на орбитах*) $\pi(gx) = \pi(x)$ для любых $g \in G$, $x \in X$;
- (*универсальность*) если Y - аффинное многообразие, $\alpha\colon X \to Y$ - такой морфизм, что $\alpha(gx) = \alpha(x)$ для любых $g \in G$, $x \in X$, то существует единственный морфизм $\alpha_\pi\colon X/G \to Y$ такой, что $\alpha = \alpha_\pi \circ \pi$. Другимим словами, коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ X/G \arrow[rr, dotted, "\alpha_\pi"] & & Y \end{tikzcd}$$

Иногда категорным фактором называют само многообразие X/G (при этом из контекста должно быть ясно как определен морфизм факторизации).

Задача 20.1. *Доказать, что если для действия* $G\colon X$ *существует категорный фактор* $(X/G,\pi)$, *то* $\overline{\pi(X)}=X/G$ *(другими словами, морфизм факторизации доминантен).*

Вопрос о существовании категорного фактора решается с использованием алгебры инвариантов. А именно, действие $G\colon X$ канонически определяет представление

$$G\colon \mathbb{C}[X],\qquad (g\cdot f)(x)=f(g^{-1}x) \tag{20.2}$$

и *алгебру инвариантов*

$$\mathbb{C}[X]^G:=\{f\in\mathbb{C}[X]\mid g\cdot f=f \text{ для всех } g\in G\}.$$

Алгебра $\mathbb{C}[X]^G$ является подалгеброй алгебры $\mathbb{C}[X]$. Всякий элемент алгебры $\mathbb{C}[X]^G$ называют *инвариантом.*

Теорема 20.2. *Предположим, что алгебра инвариантов* $\mathbb{C}[X]^G$ *конечно порождена. Тогда существует категорный фактор.*

Доказательство. Определим X/G как аффинное многообразие алгебра регулярных функций которого есть $\mathbb{C}[X]^G$. Вложение алгебр $\mathbb{C}[X]^G\hookrightarrow\mathbb{C}[X]$ определяет морфизм факторизации π.

Конструктивное описание категорного фактора следующее. Пусть $F_1,\dots,F_N$ - образующие алгебры инвариантов $\mathbb{C}[X]^G$. Рассмотрим морфизм

$$\Pi\colon X\to\mathbb{C}^N,\qquad x\mapsto(F_1(x),\dots,F_N(x)).$$

Положим $X/G:=\overline{\Pi(X)}\subset\mathbb{C}^N$ и определим морфизмом факторизаци

$$\pi\colon X\to X/G,\qquad x\mapsto(F_1(x),\dots,F_N(x)).$$

□

Задача 20.3. *Доказать, что и наоборот, если для действия* $G\colon X$ *существует категорный фактор, то алгебра инвариантов* $\mathbb{C}[X]^G$ *конечно порождена.*

Таким образом, *вопрос о существовании категорного фактора эквивалентен вопросу о конечной порожденности алгебры инвариантов.*

Замечание 20.4. Обобщенная 14-я проблема Гильберта состоит в описании действий $G\colon X$ для которых алгебра инвариантов $\mathbb{C}[X]^G$ конечно порождена. В 1956 году Нагата построил унипотентную линейную алгебраическую группу и ее представление для которого алгебра инвариантов не является конечно порожденной (контрпример Нагаты к 14-ой проблеме Гильберта). Интересно, что по существу этот контрпример - единственный известный (все другие известные контпримеры построены на основе контрпримера Нагаты).

21. Существование категорного фактора в редуктивном случае

Рассмотрим действие $G\colon X$ редуктивной линейной алгебраической группы G на аффинном многообразии X. Наша основная цель в этом параграфе - доказать теорему о существовании категорного фактора для такого действия.

Лемма 21.1. *Существует представление* $G\colon V$, *инвариантное аффинное подмногообразие* $X'\subset V$ *и эквивариантный изоморфизм аффинных многообразий* $\varphi\colon X\to X'$.

Доказательство. Положим

$$L = \langle\{g\cdot f_i \mid g\in G,\ 1\leqslant i\leqslant n\}\rangle,$$

где $f_1,\ldots,f_n$ - образующие алгебры $\mathbb{C}[X]$. Тогда L является G-инвариантным конечномерным подпространством в $\mathbb{C}[X]$. Пусть $F_1,\ldots,F_N$ - базис подпространства L. Положим $V=\mathbb{C}^N$. Тогда очевидным образом определено представление $G\colon\mathbb{C}^N$ такое, что морфизм

$$\varphi\colon X\to\mathbb{C}^N,\qquad x\mapsto(F_1(x),\ldots,F_N(x))$$

G-эквивариантен. Положим $X'=\varphi(X)$. □

Грубо говоря, в лемме 21.1 утверждается, что действие $G\colon X$ может быть реализовано как действие на инвариантном аффинном подмногообразии $X\subset V$, где $G\colon V$ - представление.

Из редуктивности группы G и локальной конечности представления (20.2) (лемма 14.6) вытекает, что однозначно определен G-эквивариантный проектор

$$\natural\colon\mathbb{C}[X]\to\mathbb{C}[X]^G.$$

Нетрудно заметить, что

$$(fg)^\natural = fg^\natural\ \text{ для }\ f\in\mathbb{C}[X]^G,\ g\in\mathbb{C}[X]. \tag{21.1}$$

Задача 21.2. *Пусть $Y\subset X$ - инвариантное аффинное подмногообразие. Доказать, что гомоморфизм ограничения*

$$\mathbb{C}[X]^G\to\mathbb{C}[Y]^G,\qquad f\mapsto f|_Y$$

сюръективен.

Теорема 21.3. *Алгебра инвариантов $\mathbb{C}[X]^G$ конечно порождена.*

Доказательство. Из леммы 21.1 и утв. задачи 21.2 следует, что достаточно рассмотреть случай, когда X - линейное пространство, $G\colon X$ - представление.

Положим

$$\mathbb{C}[X]^G_+ = \{f\in\mathbb{C}[X]^G \mid f(0)=0\},$$

I - идеал в $\mathbb{C}[X]$, порожденный $\mathbb{C}[X]^G_+$, $f_1,\ldots,f_m\in\mathbb{C}[X]^G_+$ - однородные образующие идеала I. Мы утверждаем, что $f_1,\ldots,f_m$ являются образующими алгебры $\mathbb{C}[X]^G$. Действительно, достаточно проверить, что всякий однородный многочлен $f\in\mathbb{C}[X]^G$ можно представить как многочлен от $f_1,\ldots,f_m$. Рассуждаем индукцией по $\deg(f)$. Случай $\deg(f)=0$ очевиден. Пусть $\deg(f)\geqslant 1$. Имеем разложение

$$f=h_1f_1+\ldots+h_mf_m,$$

где $h_1,\ldots,h_m\in\mathbb{C}[X]$ - однородные многочлены. Используя (21.1) получаем

$$f^\natural=(h_1f_1+\ldots+h_mf_m)^\natural=h_1^\natural f_1+\ldots+h_m^\natural f_m.$$

По индукции, каждый многочлен $h_1^\natural,\ldots,h_m^\natural$ можно представить как многочлен от $f_1,\ldots,f_m$. Следовательно, f можно представить как многочлен от $f_1,\ldots,f_m$. □

Из теорем 20.2 и 21.3 получаем

Следствие 21.4. *Для действия $G\colon X$ существует категорный фактор.*

22. Свойства категорного фактора в редуктивном случае

Мы рассматриваем действие редуктивной линейной алгебраической группы G на аффинном многообразии X. В параграфе 21 мы доказали, что для этого действия существует категорный фактор $(X/G, \pi)$. В этом параграфе мы докажем несколько важных фактов об этом категорном факторе.

Лемма 22.1. (1) *Для любых инвариантных аффинных подмногообразий $Y', Y'' \subset X$ существует инвариант $f \in \mathbb{C}[X]^G$ такой, что $f|_{Y'} = 0$ и $f|_{Y''} = 1$.*

(2) *Каждый слой морфизма π содержит ровно одну замкнутую орбиту.*

Доказательство. (1) следует из утв. задачи 21.2.

(2) следует из (1) и утв. задачи 14.5. □

Из леммы 22.1 следует, что

$$X/G \;=\; \left\{\begin{matrix}\text{множество}\\ \text{замкнутых орбит}\end{matrix}\right\} \qquad \text{(как множества)}.$$

В частности, если конечная группа G действует на аффинном многообразии, то слоями факторного морфизма являются в точности орбиты группы G.

Действие $G\colon X$ называется *стабильным*, если слой общего положения морфизма факторизации состоит их одной (тем самым замкнутой) орбиты. Для связных полупростых [2] линейных алгебраических групп имеется следующий *критерий стабильности В.Л.Попова*, который мы приводим без доказательства.

Теорема 22.2. *Действие связной полупростой линейной алгебраической группы G на неприводимом аффинном факториальном многообразии стабильно тогда и только тогда, когда стабилизатор точки общего положения $x \in X$ в группе G редуктивен.*

Лемма 22.3. *Для всякого инвариантного аффинного подмногообразия $Y \subset X$ выполнены следующие утверждения.*

(1) *$\pi(Y)$ является аффинным подмногообразием в X/G.*

(2) *Рассмотрим морфизм*

$$\varphi\colon Y \to \pi(Y), \qquad x \mapsto \pi(x).$$

Тогда пара $(\pi(Y), \varphi)$ является категорным фактором для действия $G\colon Y$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что лемма 22.3 вытекает из следующих двух утверждений.

(1′) *$\pi(Y)$ является аффинным подмногообразием в X/G.*

(2′) *Рассмотрим морфизм*

$$\varphi_1\colon Y \to \overline{\pi(Y)}, \qquad x \mapsto \pi(x).$$

Тогда пара $(\overline{\pi(Y)}, \varphi_1)$ является категорным фактором для действия $G\colon Y$.

Докажем утверждения (1′) и (2′).

(2′) легко вытекает из утверждения задачи 21.2.

[2]Линейная алгебраическая группа G называется полупростой, если G редуктивна и $[G, G] = G$. Например, полупростыми являются группы $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{Sp}(2n, \mathbb{C})$, $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$.

Докажем ($1'$). Мы должны доказать, что $\pi(Y) = \overline{\pi(Y)}$. Мы допустим, что $Z = \overline{\pi(Y)} \setminus \pi(Y) \neq \emptyset$ и получим противоречие. Рассмотрим действие $G\colon Y$. Согласно ($2'$) категорным фактором для этого действия является $(\overline{\pi(Y)}, \varphi_1)$. Заметим, что $\varphi_1^{-1}(\overline{Z})$ является инвариантным аффинным подмногообразием в Y. Рассмотрим действие $G\colon \varphi_1^{-1}(\overline{Z})$ и морфизм

$$\varphi_2\colon \varphi_1^{-1}(\overline{Z}) \to \overline{Z}, \qquad x \mapsto \varphi_1(x).$$

Согласно утверждению ($2'$) (примененному к действию $G\colon Y$ и подмногообразию $\varphi_1^{-1}(\overline{Z}) \subset Y$), пара $(\overline{Z}, \varphi_2)$ является категорным фактором для действия $G\colon \varphi_1^{-1}(\overline{Z})$. Очевидно, морфизм φ_2 не доминантен. Но это противоречит утверждению задачи 20.1. □

Следствие 22.4. *Морфизм факторизации $\pi\colon X \to X/G$ сюръективен.*

Рассмотрим следующий (нестрого сформулированный) вопрос.

Пусть $x \in X$, $x' \in \overline{Gx} \setminus Gx$. Можно ли каким-либо особым образом приблизится к точке x' двигаясь по орбите Gx ?

Ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.

Теорема 22.5. *[Теорема Гильберта-Мамфорда] Существует гомоморфизм групп*

$$\varphi\colon \mathbb{C}^* \to G, \qquad t \mapsto \varphi(g)$$

такой, что

$$\lim_{t\to\infty} (\varphi(t) \cdot x) = x'.$$

Доказательство. Мы укажем план доказательства этой теоремы в случае когда X есть линейное пространство, $G\colon X$ есть линейное представление, $x' = 0$ (в общем случае теорема доказывается аналогично).

Сначала напомним, что для связной редуктивной группы G имеется *разложение Картана* $G = KTK$, где $K \subset G$ - некоторая компактная подгруппа, $T \subset G$ - алгебраический тор.

Итак, план доказательство теоремы 22.5 такой.

(1) $\overline{KTKx} \ni 0 \implies \overline{TKx} \ni 0$.
(2) $\overline{TKx} \ni 0 \implies \overline{Tgx} \ni 0$, где $g \in K$.
(3) $\overline{Tgx} \ni 0 \implies \overline{T'x} \ni 0$, где $T' = g^{-1}Tg$.
(4) $\overline{T'x} \ni 0 \implies$ утверждение теоремы Гильберта-Мамфорда.

□

Определение 22.6. Пусть $G\colon V$ - линейное представление редуктивной группы G, $\pi\colon V \to V/G$ - морфизм факторизации. Положим $\overline{0} = \pi(0)$. Прообраз $\pi^{-1}(\overline{0})$ называется *нульконусом.*

Задача 22.7. *Рассмотрим представление* $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})\colon S^d\mathbb{C}^{2*}$. *Доказать, что форма $f(z_0, z_1) \in S^d\mathbb{C}^{n*}$ лежит в нульконусе тогда и только тогда, когда линейной заменой f приводится к виду $f_0 z_0^d + f_1 z_0^{d-1} z_1 + \ldots + f_m z_0^m z_1^{d-m}$, где $m < d/2$.*

23. Примеры

Пример 23.1. $\mathbb{S}_n\colon \mathbb{C}^n$ (стандартное представление). Пусть $x_1, \ldots, x_n$ - стандартные координатные функции в $\mathbb{C}^n$. Как известно,

$$\mathbb{C}[\mathbb{C}^n]^{\mathbb{S}_n} = \mathbb{C}[\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x)],$$

где

$$\sigma_1(x) = x_1 + \ldots + x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\sigma_k(x) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\sigma_n(x) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$$

- элементарные симметрические функции. Таким образом, $\mathbb{C}^n/\mathbb{S}_n \simeq \mathbb{C}^n$ и морфизмом факторизации является

$$\pi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \qquad x \mapsto (\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x)).$$

Пример 23.2. Рассмотрим линейное представление

$$G = \{1, -1\}\colon \mathbb{C}^2, \qquad t \cdot (x_1, x_2) = (tx_1, tx_2).$$

Тогда

$$\mathbb{C}[\mathbb{C}^2]^G = \mathbb{C}[x_1^2, x_2^2, x_1x_2]$$

и морфизм факторизации есть

$$\pi\colon \mathbb{C}^2 \to Y \subset \mathbb{C}^3, \qquad (x_1, x_2) \mapsto (x_1^2, x_2^2, x_1x_2),$$

где

$$Y = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{C}^3 \mid y_1y_2 = y_3^2\} = \mathbb{C}^2/G.$$

Заметим, что фактор-многообразие из предыдущего примера особо и даже не факториально.

Пример 23.3. Рассмотрим представление

$$\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})\colon \mathbf{gl}(n, \mathbb{C}), \qquad g \cdot A = gAg^{-1}.$$

....

Дополнение

24. Факторы автоморфии

Пусть Γ - группа, W - аналитическое многообразие, $\Gamma : W$ - свободное дискретное действие (*свободное* означает, что стабилизатор всякой точки $w \in W$ в Γ тривиален; *дискретное* означает, что для каждой точки $w \in W$ существует окрестность которую каждая Γ-орбита пересекает не более чем в одной точке).

Определение 24.1. Отображение $\varphi : \Gamma \times W \to \mathbb{C}^*$ называется *фактором автоморфии,* если

(1) для любого $\gamma \in \Gamma$ отображение $\varphi(\gamma, \cdot) \colon W \to \mathbb{C}^*$ голоморфно;
(2) $\varphi(e, w) = 1$;
(3) $\varphi(\gamma'\gamma, w) = \varphi(\gamma, w)\varphi(\gamma', \gamma \cdot w)$.

Фактор автоморфии φ определяет на $W \times \mathbb{C}$ отношение эквивалентности $\sim$. А именно,

$$(w', t') \sim (w, t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} w' = \gamma w \\ t' = \varphi(\gamma, w)t \end{cases}, \text{ для некоторого } \gamma \in \Gamma.$$

Рассмотрим множество классов эквивалентности $(W \times \mathbb{C})/\!\sim$ и отображение

$$p \ : \ (W \times \mathbb{C})/\!\sim \ \to \ W/\Gamma, \qquad \overline{(w, t)} \mapsto \overline{w}.$$

На $(W \times \mathbb{C})/\sim$ и W/Γ очевидным образом вводятся структуры аналитических многообразий. При этом отображение p голоморфно и определяет на $(W \times \mathbb{C})/\!\sim$ структуру 1-мерного комплексного векторного расслоения над W/Γ. Всякое голоморфное отображение

$$\theta : W \to \mathbb{C}$$

такое, что $\theta(\gamma \cdot w) = \varphi(\gamma, w)\theta(w)$ определяет голоморфное сечение

$$\widehat{\theta} \ : \ W/\Gamma \ \to \ (W \times \mathbb{C})/\!\sim \ , \qquad \overline{w} \mapsto \overline{(w, \theta(w))}$$

расслоения p.

25. Комплексификация и овеществление

Рассмотрим вещественное пространство V и его комплексификацию $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V \otimes \mathbb{C}$. В дальнейшем, благодаря вложению

$$V \to V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \qquad v \mapsto v \otimes 1,$$

мы будем рассматривать V как вещественное подпространство в $V \otimes \mathbb{C}$. В пространстве $V \otimes \mathbb{C}$ определен оператор сопряжения

$$\overline{\cdot} : \ V \otimes \mathbb{C} \to V \otimes \mathbb{C}, \qquad v \otimes \lambda \mapsto \overline{v \otimes \lambda} := v \otimes \overline{\lambda}.$$

Если W - комплексное подпространство в $V \otimes \mathbb{C}$, то $\overline{W}$ тоже является комплексным подпространством в $V \otimes \mathbb{C}$. Если U - такое комплексное подпространство в $V \otimes \mathbb{C}$, что $\overline{U} = U$, то $U = V' \otimes \mathbb{C}$, где $V' = U \cap V$. Например, если W - произвольно комплексное подпространство в $V \otimes \mathbb{C}$, то $\overline{W + \overline{W}} = W + \overline{W}$ и, следовательно, $W + \overline{W} = V' \otimes \mathbb{C}$.

Рассмотрим комплексное пространство U. Умножение на $\sqrt{-1}$ определяет линейный оператор $I \colon U_{\mathbb{R}} \to U_{\mathbb{R}}$. Рассмотрим комплексификацию

$$I_{\mathbb{C}} \colon (U_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \to (U_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$$

оператора I. Имеем разложение в прямую сумму

$$(U_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = (U_{\mathbb{R}})'_{\mathbb{C}} \dotplus (U_{\mathbb{R}})''_{\mathbb{C}} \tag{25.1}$$

комплексных подпространств, где

$$(U_{\mathbb{R}})'_{\mathbb{C}} := \{u \in (U_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \mid I_{\mathbb{C}}(u) = \sqrt{-1}u\},$$
$$(U_{\mathbb{R}})''_{\mathbb{C}} := \{u \in (U_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \mid I_{\mathbb{C}}(u) = -\sqrt{-1}u\}.$$

Имеется канонический $\mathbb{C}$-линейный изоморфизм

$$U \to (U_{\mathbb{R}})'_{\mathbb{C}}, \qquad u \mapsto u - \sqrt{-1}I(u)$$

и канонический $\mathbb{C}$-антилинейный изоморфизм

$$U \to (U_{\mathbb{R}})''_{\mathbb{C}}, \qquad u \mapsto u + \sqrt{-1} I(u)$$

комплексных пространств.