Лекция 15. Интеграл Лебега

Как меру Лебега мы определили не для всех множеств, так и интеграл Лебега будет определен не для всех функций.

Определение 15.1. Пусть X — пространство с мерой и Y — топологическое пространство. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *измеримым*, если для всякого открытого подмножества $U \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(U)$ измерим (равносильное условие: измерим прообраз всякого замкнутого множества).

Если $Y = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то измеримое отображение из X в Y называется *измеримой функцией.*

Ясно, что если отображение $f\colon X \to Y$ измеримо, а $g\colon Y \to Y'$ — непрерывное отображение в другое топологическое пространство, то композиция $g \circ f$ измерима; кроме того, из того, что пересечение измеримых множество измеримо, вытекает следующее: если $f_1\colon X \to Y_1$ и $f_2\colon X \to Y_2$ измеримы, то отображение $(f_1, f_2)\colon X \to Y_1 \times Y_2$ также измеримо. Сопоставляя эти два факта, получаем следующее

Предложение 15.2. *Пусть X — пространство с мерой. Если $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ — измеримые функции, то функции $f + g$, fg, $|f|$ и λf для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ также измеримы.*

Если $f\colon X \to Y$ — измеримое отображение, то ясно, что измеримы прообразы не только открытых множеств, но и любых борелевских (в частности, замкнутых множеств или полуоткрытых интервалов в $\mathbb{R}$).

Отметим еще, что характеристическая функция подмножества $E \subset X$ (равная единице на E и нулю вне E) измерима, очевидно, тогда и только тогда, когда измеримо множество E.

Мы будем также рассматривать функции на пространствах с мерой, принимающие значения в $[0; \infty]$. Поскольку $[0; \infty]$ также можно рассматривать как топологическое пространство (базис открытых множеств — обычные открытые множества в $[0; \infty)$ плюс интервалы вида $(a; \infty])$, постольку можно говорить об измеримых функциях со значениями в $[0; \infty]$. Легко видеть, что отображение $f\colon X \to [0; \infty]$ измеримо тогда и только тогда, когда измеримы множество $f^{-1}(\infty)$ и ограничение f на $X \setminus f^{-1}(\infty)$.

Предложение 15.3. *Пусть X — пространство с мерой и $\{f_n\}$ — последовательность измеримых отображений из X в $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $[0; +\infty]$. Предположим, что для всякого $x \in X$ существует предел*

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *(предел поточечный, никакой равномерности не предполагается). Тогда отображение f также измеримо.*

Доказательство. Разберем случай отображений в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Положим $B_\varepsilon(a) = \{y \mid |y-a| < \varepsilon\}$, $\bar{B}_\varepsilon(a) = \{y \mid |y-a| \leqslant \varepsilon\}$. Поскольку всякое открытое подмножество в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ является не более чем счетным объединением множеств вида $B_\varepsilon(a)$, достаточно проверить измеримость $f^{-1}(B_\varepsilon(a))$. Эта измеримость очевидна из равенства

$$f^{-1}(B_\varepsilon(a)) = \bigcup_{n=2}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=k}^{\infty} f_m^{-1}(\bar{B}_{\varepsilon-1/n}(a)).$$

Случай отображения в $[0;\infty]$ разберите самостоятельно (все сводится к доказательству измеримости прообраза бесконечности). $\square$

Теперь перейдем к определению интеграла Лебега. Начнем с того, что определим интеграл от неотрицательных вещественных функций, а точнее — отображений в $[0;\infty]$ (мы будем называть такие отображения попросту «положительными функциями»).

Ниже мы будем постоянно пользоваться следующим обозначением: если $f,g\colon X \to [0;\infty]$, то запись $f \leqslant g$ будет означать, что $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in X$.

Зафиксируем некоторое пространство с мерой $(X, \mathcal{E}, \mu)$.

Определение 15.4. Отображение $\varphi\colon X \to [0;\infty)$ называется *простой функцией*, если X можно представить в виде конечного объединения попарно непересекающихся измеримых множеств $X = E_1 \sqcup \ldots \sqcup E_n$ таким образом, что f будет постоянна и неотрицательна на каждом из E_i.

Интегралом Лебега от простой функции $\varphi\colon X \to [0;\infty]$ называется сумма $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\mu(E_i) \in [0;\infty]$, где $x_i \in E_i$.

Обозначение: $\int_X \varphi d\mu$.

Иногда вместо $\int_X f d\mu$ мы будем для краткости писать $\int f$, а иногда, напротив, для ясности придется писать что-нибудь вроде $\int_X f(x) d\mu(x)$.

Отметим, что всякая простая функция измерима (как линейная комбинация характеристических функций измеримых множеств). Обратите также внимание, что все значения простой функции конечны.

Из конечной аддитивности меры μ ясно, что $\int \varphi d\mu$ не зависит от выбора разбиения пространства X, относительно которого функция φ будет простой. Ясно также, что если φ и ψ — простые функции, то проста и функция $\varphi+\psi$, причем $\int(\varphi+\psi)d\mu=\int\varphi d\mu+\int\psi d\mu$ (если φ проста относительно разбиения $X=\bigsqcup E_i$, а ψ — относительно разбиения $X=\bigsqcup F_j$, то функция $\varphi+\psi$ проста относительно разбиения $X=\bigsqcup(E_i\cap F_j)$). Наконец, совсем очевидно, что если φ — простая функция и $c\geqslant 0$, то $\int c\varphi d\mu=c\int\varphi d\mu$.

Определение 15.5. *Интегралом Лебега* от измеримой положительной функции $f\colon X\to[0;\infty]$ называется верхняя грань

$$\int f d\mu=\sup_{\substack{\varphi\leqslant f\\ \varphi \text{ простая}}}\int\varphi d\mu\in[0;\infty].$$

Если $E\subset X$ — измеримое подмножество, то мера μ на X индуцирует, как мы отмечали ранее, меру на E; если f — измеримая положительная функция, то интеграл от ограничения $f|_E$ по этой мере на E мы будем обозначать $\int_E f d\mu$; непосредственно из определения видно, что $\int_E f d\mu=\int_X \chi_E f d\mu$, где χ_E — характеристическая функция множества E.

В следующем очевидном предложении резюмированы простейшие свойства интеграла от неотрицательных функций.

Предложение 15.6. *Пусть $f,g\colon X\to[0;+\infty]$ измеримы.*

(1) Если $f\leqslant g$, то $\int_X f d\mu\leqslant\int_X g d\mu$.

(2) Если $\lambda\geqslant 0$ — константа, то $\int_X(\lambda f)d\mu=\lambda\cdot\int_X f d\mu$.

(3) Если $Y\subset X$ измеримо, то $\int_Y f d\mu\leqslant\int_X f d\mu$.

Чуть сложнее доказывается следующий важный факт.

Предложение 15.7. *Пусть f — положительная измеримая функция на пространстве с мерой $(X,\mathcal{E},\mu)$. Тогда отображение $E\mapsto\int_E f d\mu$ является мерой на X.*

Доказательство. Нам надо показать, что $\int_E f d\mu=\sum\int_{E_i} f d\mu$, как только $E=\bigsqcup_i E_i$, где все E_i измеримы. В самом деле, пусть $\varphi\leqslant f$ — простая функция. Представим ее в виде $\varphi=\sum_{j=1}^n\lambda_i\chi_{F_i}$, где $\lambda_i>0$ и F_i — попарно непересекающиеся измеримые множества. Тогда

$$\int_E\varphi d\mu=\sum_{i=1}^n\lambda_i\mu(F_i)=\sum_{i=1}^n\sum_j\lambda_i\mu(F_i\cap E_j)=\sum_j\sum_{i=1}^n\lambda_i\mu(F_i\cap E_j)=$$
$$=\sum_j\int_{E_j}\varphi d\mu\leqslant\sum_j\int_{E_j} f d\mu.$$

Беря верхнюю грань по всем простым $\varphi \leqslant f$, получаем, что $\int_E f d\mu \leqslant \sum_j \int_{E_j} f d\mu$.

Противоположное неравенство доказывается совсем просто: для всякого натурального n имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{E_n} f d\mu = \int_X \chi_{E_1 \cup \ldots \cup E_n} f d\mu \leqslant \int_X f d\mu;$$

остается перейти к пределу при $n \to \infty$. □

Замечание 15.8. Меры, получающиеся конструкцией из предложения 15.7, называются *абсолютно непрерывными* относительно меры μ.

Соглашение 15.9. Будем говорить, что некоторое свойство, зависящее от точки $x \in X$, выполнено *почти всюду* (или *почти всюду по мере* μ, если возможна двусмысленность), если оно выполнено для всех x, кроме тех, что лежат в некотором множестве меры нуль.

Из предложения 15.7 (точнее, из его тривиального частного случая, касающегося объединений конечного числа множеств) вытекает, что интегралы Лебега от двух функций совпадающих почти всюду, должны быть равны.

Вот основное свойство интеграла Лебега от положительных функций.

Теорема 15.10 (теорема Беппо Леви). *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность отображений из X в $[0; +\infty]$, причем $f_n \leqslant f_{n+1}$ для всех n, и пусть $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ для почти всех $x \in X$ (сходимость поточечная). Тогда $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.*

Доказательство. Если $X_0 \subset X$ — подмножество меры нуль, на котором сходимость $f_n(x)$ к $f(x)$ места не имеет, то, поскольку интегралы от любой функции по X и $X \setminus X_0$ совпадают, можно заменить X на $X \setminus X_0$ и считать, что $f_n \to f$ всюду. Так мы и сделаем.

В силу предложения 15.3 функция f измерима, так что пространство X представляется в виде объединения двух непересекающихся измеримых множеств, на одном из которых f всюду конечна, а на другом — всюду бесконечна. Поэтому, ввиду аддитивности интеграла как функции множества (предложение 15.7), достаточно доказать теорему отдельно для каждого из двух случаев: когда f всюду конечна и когда она всюду бесконечна.

Пусть сначала $f < \infty$ всюду. Имеем $f_n \leqslant f$ для всех n, откуда $\int_X f_n d\mu \leqslant \int_X f d\mu$; устремляя n к бесконечности, получаем, что $\lim_{n\to\infty} f_n d\mu \leqslant \int_X f d\mu$.

Чтобы доказать противоположное неравенство, зададимся действительным числом $c \in (0;1)$ и положим $X_n = \{x \in X \mid f_n(x) \geqslant cf(x)\}$. Ясно, что X_n — измеримое множество и что $\int_X f_n d\mu \geqslant \int_{X_n} f_n d\mu \geqslant c \cdot \int_{X_n} f d\mu$. Из условия ясно, что $X_i \subset X_{i+1}$ для всех i и что $\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X$, так что из предложения 15.7 и свойства непрерывности мер (предложение 14.4) вытекает, что если перейти в полученном неравенстве к пределу при $n \to \infty$, то окажется, что $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geqslant c \cdot \int_X f d\mu$. Устремляя c к единице, получаем искомое противоположное неравенство.

Если f всюду бесконечна, то достаточно, очевидно, рассматривать случай, когда $\mu(X) > 0$ и тем самым $\int_X f d\mu = \infty$ (в противном случае все интегралы по X равны нулю и доказывать нечего). Зададимся произвольным $C > 0$ и положим $X_n = f_n^{-1}(C;+\infty)$. Тогда X — по-прежнему возрастающее объединение множеств X_n, причем $\int_X f_n d\mu \geqslant \int_{X_n} f_n d\mu \geqslant C \cdot \mu(X_n)$. Поскольку $\mu(X_n) \to \mu(X) > 0$ (опять по предложению 14.4), имеем $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geqslant C \cdot \mu(X)$, где C произвольно, так что предел равен бесконечности, что и требовалось. $\square$

Вот первое приложение теоремы Беппо Леви.

Предложение 15.11. *Если f и g — положительные измеримые функции, то $\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.*

Доказательство. Начнем с простой леммы.

Лемма 15.12. *Для всякой положительной измеримой функции φ существует монотонная последовательность простых функций $\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \ldots \leqslant \varphi_n \leqslant \ldots$, поточечно сходящаяся к f.*

Доказательство леммы. Построим по индукции для каждого $n \in \mathbb{N}$ разбиение $0 = a_{n0} < a_{n1} < \ldots < a_{n,k_n-1} < a_{nk_n} = n$ отрезка $[0;n]$, для которого длины всех отрезков разбиения не превосходят $1/2^{n-1}$; этому разбиению сопоставим простую функцию f_n, для которой $f_n(x) = a_{nj}$ при $x \in f^{-1}([a_{nj}, a_{n,j+1}))$ и $f(x) = n$ при $x \in f^{-1}([n;\infty])$; ясно, что $0 \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant 1/2^{n-1}$ при $x \in f^{-1}([0;n))$. Именно, положим $a_{10} = 0$, $a_{11} = 1$; если разбиение с номером n построено, то разбиение номер $n+1$ строим так: каждый из отрезков, на которые разбит $[0;n]$, делим пополам, плюс отрезок $[n; n+1]$ делим на 2^n равных частей. Очевидно, что для всех x последовательность $\{f_n(x)\}$ монотонно возрастает и сходится к $f(x)$. $\square$

Пусть теперь $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ — монотонные последовальности простых функций, поточечно сходящиеся к f и g соответственно. Тогда $\{\varphi_n + \psi_n\}$ — монотонная последовательность простых функций, поточечно сходящаяся к $f+g$. По теореме Беппо Леви имеем $\lim \int \varphi_n = \int f$, $\lim \int \psi_n = \int g$ и $\lim(\int \varphi_n + \int \psi_n) = \lim \int (\varphi_n + \psi_n) = \int (f+g)$. $\square$

В качестве следствия докажем аналог теоремы Беппо Леви для убывающих последовательностей.

Предложение 15.13. *Пусть $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \dots$ — убывающая последовательность положительных измеримых функций, поточечно сходящаяся почти всюду к функции f. Если $\int_X f_1 d\mu < \infty$, то $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.*

Доказательство. Поскольку f_1, все f_i и $f_1 - f_i$ — положительные функции и при этом $\int_X f_1 d\mu < \infty$, из предложения 15.11 вытекает, что $\int_X (f_1 - f_i) = \int_X f_1 - \int_X f_i$. Остается применить теорему Беппо Леви к возрастающей последовательности $\{f_1 - f_i\}$. $\square$

Теперь определим интеграл Лебега от не обязательно положительных измеримых функций.

Определение 15.14. Измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{C}$ называется *суммируемой*, если $\int_X |f| d\mu < \infty$.

Из предложения 15.6 следует, что комплексная функция суммируема тогда и только тогда, когда суммируемы ее действительная и мнимая часть.

Обозначение 15.15. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — произвольная функция. Тогда положим $f_+(x) = \max(f(x), 0)$ и $f_-(x) = -\min(f(x), 0)$.

Ясно, что f_+ и f_- неотрицательны, измеримы, если измерима f, что $f = f_+ - f_-$ и что интегралы от f_+ и f_- конечны тогда и только тогда, когда f суммируема. Из этих рассмотрений вытекает, что следующее определение применимо к любой суммируемой функции:

Определение 15.16. Пусть f — суммируемая вещественная функция на X, представленная в виде $f = f_1 - f_2$, где f_1 и f_2 — неотрицательные измеримые функции с конечным интегралом. Тогда *интегралом Лебега от f по X* называется число

$$\int_X f d\mu = \int_X f_1 d\mu - \int_X f_2 d\mu.$$

Если f — суммируемая функция на X со значениями в $\mathbb{C}$, то ее *интегралом Лебега по X* называется число

$$\int_X f d\mu = \int_X \mathrm{Re}(f) d\mu + i \cdot \int_X \mathrm{Im}(f) d\mu.$$

Приведенное здесь определение интеграла Лебега от вещественных функций нуждается в проверке корректности. Сделаем это: если $f = f_1 - f_2 = g_1 - g_2$ — два представления f в виде разности неотрицательных суммируемых функций, то $f_1 + g_2 = g_1 + f_2$, откуда, ввиду предложения 15.11, имеем $\int f_1 + \int g_2 = \int g_1 + \int f_2$, или $\int f_1 - \int g_1 = \int f_2 - \int g_2$, что и требовалось.

Предложение 15.17. *Пусть f и g — суммируемые функции на X, и пусть $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Тогда:*

(0) $\lambda f + \mu g$ суммируема;

(1) $\int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu$;

(2) $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$;

(3) $\left|\int_X f d\mu\right| \leqslant \int_X |f| d\mu$.

(4) если $\mu(X) < \infty$, то $\left|\int_X f d\mu\right| \leqslant \mu(X) \cdot \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Доказательство. Пусть сначала f и g — функции со значениями в $\mathbb{R}$, а λ и μ вещественны. Тогда (0) и (2) немедленно следуют из предложения 15.11, (1) очевидно ввиду предложения 15.6, (3) вытекает из 15.11 и очевидного неравенства

$$\left| \int f_+ - \int f_- \right| \leqslant \int f_+ + \int f_-,$$

а (4) немедленно вытекает из (3).

Комплексный случай получается из вещественного с помощью выделения действительной и мнимой частей. □

Для (кусочно) непрерывных функций, и вообще для «хороших» функций в смысле лекции 10, интеграл Лебега совпадает с интегралом, определенным в указанной лекции:

Предложение 15.18. *Если $f\colon [a;b] \to \mathbb{C}$ — хорошая функция в смысле определения 10.5, то она суммируема на $[a;b]$ относительно меры Лебега μ и $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a;b]} f d\mu$.*

Доказательство. Из пункта (4) предложения 15.17 вытекает, что если последовательность суммируемых функций $\{f_n\}$ на пространстве с мерой (X,μ), где $\mu(X) < \infty$, равномерно сходится к функции f, то $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$ (вскоре мы докажем и более сильные результаты о предельном переходе под знаком интеграла). Поэтому достаточно проверить предложение для случая, когда функция f кусочно-постоянна, а тогда оно очевидно. $\square$

До сих пор единственной имевшейся в нашем распоряжении теоремой о предельном переходе под знаком интеграла Лебега была теорема Беппо Леви; сейчас мы получим более общий результат.

Для начала нелишне заметить, что если не накладывать совсем никаких условий на последовательность подынтегральных функций, то интеграл от предела может отличаться от предела интегралов (вспомним общеизвестные примеры с неравномерно сходящимися последовательностями непрерывных функций). Тем не менее, полного произвола в этой области все же нет:

Предложение 15.19 (лемма Фату). *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность положительных измеримых функций на пространстве (X,μ), сходящаяся почти всюду к функции f. Если существует предел $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$, то*

$$\int_X f d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu;$$

в общем случае имеем $\int_X f d\mu \leqslant \underline{\lim} \int_X f_n d\mu$.

Доказательство. Для всякого $n \in \mathbb{N}$ положим $\varphi_n(x) = \inf_{m\geqslant n} f_m(x)$. Легко видеть, что φ_n — измеримые функции, $\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \dots$ и $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ для тех же x, для которых $f_n(x) \to f(x)$. Следовательно, по теореме Беппо Леви имеем $\int f = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n$. Поскольку $\varphi_n(x) \leqslant f(x)$ для всех x, имеем $\lim \int \varphi_n \leqslant \lim \int f_n$, если предел в правой части существует, так что для этого случая предложение доказано. Если же $\lim \int f_n$ не существует, то по крайней мере из неравенств $\int \varphi_n \leqslant \int f_n$ вытекает, что $\int f = -\lim \int \varphi_n$ не превосходит любой предельной точки последовательности $\left\{\int f_n\right\}$ и, в частности, ее нижнего предела. $\square$

Из леммы Фату выводится следующий удобный на практике результат о предельном переходе под знаком интеграла, называемый «теоремой Лебега об ограниченной сходимости».

Теорема 15.20. *Пусть* $\{f_n\}$ *— последовательность суммируемых функций на пространстве* $(X;\mu)$*, сходящаяся почти всюду к функции* f*. Если существует такая неотрицательная суммируемая функция* φ*, что* $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ *для всех* n *и почти всех* x*, то* $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Доказательство. Из условия ясно, что $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$, так что функция f суммируема и $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2\varphi(x)$. Поскольку интеграл разности равен разности интегралов, получаем, что теорему достаточно доказать для случая $f(x) = 0$.

Лемма 15.21. *Пусть* $\{f_n\}$ *— последовательность неотрицательных измеримых функций, сходящаяся к нулю почти всюду. Если существует такая неотрицательная суммируемая функция* φ*, что* $f_n \leqslant \varphi$ *для всех* n*, то* $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = 0$.

Доказательство леммы. Применим лемму Фату к последовательности $\{\varphi - f_n\}$:

$$\int \varphi d\mu = \int \lim_{n\to\infty}(\varphi - f_n d\mu) \leqslant \underline{\lim}\int(\varphi - f_n)d\mu = \int \varphi d\mu - \overline{\lim}\int f_n d\mu.$$

Следовательно, $\overline{\lim}\int f_n d\mu \leqslant 0$. Поскольку все члены этой последовательности неотрицательны, она сходится к нулю. □

Чтобы завершить доказательство теоремы, предположим сначала, что все $f_n(x)$ вещественны. Из неравенства $|f_n| \leqslant \varphi$ вытекает, что $(f_n)_+ \leqslant \varphi$ и $(f_n)_- \leqslant \varphi$, а из того, что $f_n(x) \to 0$, вытекает, что последовательности $\{(f_n)_+\}$ и $\{(f_n)_-\}$ сходятся к нулю. Из леммы теперь вытекает, что $\lim_{n\to\infty}\int(f_n)_+ d\mu = 0$ и $\lim_{n\to\infty}\int(f_n)_- d\mu = 0$, откуда $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = 0$.

Если f_n комплексны, то вещественная и мнимая части f_n по модулю не превосходят $|f_n|$ и тем самым φ, так что достаточно применить результат для вещественных функций к действительной и мнимой частям f_n по отдельности. □