Лекция 20. Теорема о неявной функции

Пусть переменные x и y связаны соотношением $f(x,y)=0$. Можно ли из этого соотношения выразить y как функцию от x? Точнее, пусть f — гладкая функция на $\mathbb{R}^2$, и пусть $p=(a,b)$ — такая точка, что $f(a,b)=0$. По самому́ определению производной наше соотношение можно неформально записать в виде

$$0=f(x,y)\approx f(p)+\frac{\partial f}{\partial x}(p)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(p)(y-b).$$

Если знак бы вместо $\approx$ стояло $=$, то вопрос о выражении y через x решился бы с очевидностью: если коэффициент при $(y-b)$, то есть $\dfrac{\partial f}{\partial y}(p)$, отличен от нуля, то y выражается через x, в противном случае — нет. С помощью теоремы об обратной функции мы сейчас покажем, что *локально* дело обстоит так же, даже если не заменять функцию f на ее линеаризацию; если $\dfrac{\partial f}{\partial y}(p)\neq 0$, то существуют такие открытые множества $W\ni a$ и $V\ni b$, что для всякого $x\in W$ существует и единственно $y\in V$, для которого $f(x,y)=0$. Более того, получающаяся функция $x\mapsto y$ также гладка.

Мы докажем более общее утверждение. Именно, в уравнении $f(x,y)=0$ мы будем понимать x и y не обязательно как числа, но как точки пространства $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соотвественно. Такое обобщение влечет и другие изменения в формулировке. В самом деле, чтобы по данному $x=(x_1,\dots,x_m)$ определить n чисел $y_1,\dots,y_n$, одного уравнения недостаточно: вообще говоря, чтобы однозначно определить n неизвестных, требуется n уравнений. Поэтому в общем случае $f=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ является отображением из (открытого подмножества) $\mathbb{R}^{m+n}$ в $\mathbb{R}^n$, условие же $\dfrac{\partial f}{\partial y}(p)\neq 0$ заменится на условие необращения в нуль некоторого якобиана. Вот окончательная формулировка:

Предложение 20.1 (теорема о неявной функции). *Пусть $U\subset\mathbb{R}^{m+n}=\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ — открытое множество и $f\colon U\to\mathbb{R}^n$ — отображение класса C^r, записанное в координатах как*

$$\begin{aligned}&(x_1,\dots,x_m;y_1,\dots,y_n)\mapsto\\ &\qquad(\varphi_1(x_1,\dots,x_m;y_1,\dots,y_n),\dots,\varphi_1(x_1,\dots,x_m;y_1,\dots,y_n)).\end{aligned}$$

Пусть $a=(a_1,\dots,a_m)\in\mathbb{R}^m$, $b=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ и $(a;b)\in U$, причем

$f(a;b)=(0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n$. *Если определитель*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1}(p) & \dots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_n}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial y_1}(p) & \dots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial y_n}(p) \end{vmatrix} \tag{20.1}$$

отличен от нуля, то существуют открытое множество $W\subset\mathbb{R}^m$, *содержащее точку* $(a_1,\dots,a_m)$, *и открытое множество* $V\subset\mathbb{R}^n$, *содержащее точку* $(b_1,\dots,b_n)$, *такие, что для всякого* $x=(x_1,\dots,x_m)\in W$ *существует и единственно* $y=(y_1,\dots,y_n)\in V$, *удовлетворяющее условию* $f(x;y)=(0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n$. *Наконец, отображение* $g\colon W\to V$ *ставящее в соответствие точке* $x\in W$ *то единственное* $y\in V$, *для которого* $f(x;y)=(0,\dots,0)$, *принадлежит к классу* C^r, *как и отображение* f.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\tilde f\colon\mathbb{R}^{m+n}\to\mathbb{R}^{m+n}$, заданное следующей формулой, в которой мы в некоторых местах для краткости пишем x вместо $(x_1,\dots,x_m)$ и y вместо $(y_1,\dots,y_n)$:

$$\tilde f\colon (x;y)\mapsto(x_1,\dots,x_m,\varphi_1(x;y),\dots,\varphi_n(x;y))=(x;f(x,y)).$$

Отображение $\tilde f$ принадлежит классу C^r на множестве U, а его якобиан в точке $(a;b)$ равен определителю (20.1) и тем самым отличен от нуля, так что $\tilde f'(a;b)$ является изоморфизмом. По теореме об обратной функции найдется такое открытое множество $U\ni(a;b)$, что $\tilde f$ индуцирует диффеоморфизм U_1 на $\tilde f(U_1)$. Уменьшая, если нужно, множество U, можно считать, что $U=O\times V$, где $O\subset\mathbb{R}^m$ — окрестность точки a и $V\subset\mathbb{R}^n$ — окрестность точки b; очевидно, $f(U)\supset W\times\{(0,\dots,0)\}$, где $W\subset\mathbb{R}^m$ — окрестность точки a. Покажем, что открытые множества W и V обладают требуемыми свойствами.

Заметим, что $f(x;y)=(0,\dots,0)$ тогда и только тогда, когда $\tilde f(x;y)=(x;0,\dots,0)$. Поскольку отображение $\tilde f$ взаимно однозначно на U, отсюда следует, что для всякого $x\in W$ существует не более одного $y\in V$, удовлетворяющего условию $f(x;y)=(0,\dots,0)$. Поскольку $f(U)$ содержит $W\times\{(0,\dots,0)\}$, для всякого $x\in W$ существует такой $y\in V$, что $f(x;y)=(0,\dots,0)$, причем в силу вышесказанного этот y единствен. Стало быть, отображение $g\colon W\to V$, о котором идет речь в формулировке теоремы, построено.

Чтобы показать, что g принадлежит к классу C^r, обозначим через $i\colon W\to\mathbb{R}^{m+n}$ отображение, заданное формулой $x\mapsto(x;(0,\dots,0))$, а через $p\colon U \to V$ — проекцию на второй сомножитель. Поскольку $g = p \circ h \circ i$, где $h\colon \tilde{f}(U) \to U$ — диффеоморфизм класса C^r, обратный к $\tilde{f}$; и поскольку p и i бесконечно гладки, все доказано. □

Теорема о неявной функции позволяет сформулировать понятие подмногообразия в $\mathbb{R}^n$, Сделаем это.

Зафиксируем теперь до конца лекции некоторое r (либо целое положительное число, либо символ ∞), и будем под словами «диффеоморфизм» или «гладкое отображение» понимать диффеоморфизм (гладкое отображение) класса C^r.

Предложение 20.2. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое подмножество и $k \leqslant n$ — натуральное число. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *Для всякой точки $x \in X$ существует содержащее ее открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $\varphi\colon U \to V$, где $V \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, обладающий тем свойством, что*

$$\varphi(X \cap U) = \{(y_1, \dots, y_n) \in V \mid y_{k+1} = \dots = y_n = 0\}.$$

(2) *Для всякой точки $x \in X$ существуют содержащее ее открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ и гладкие функции $f_1, \dots, f_{n-k}\colon U \to \mathbb{R}$, обладающие следующими свойствами:*

   - $X \cap U = \{\, p \in X \mid f_1(p) = \dots = f_{n-k}(p) = 0 \,\}$.
   - *Функционалы $f_1'(x), \dots, f_{n-k}'(x)$ линейно независимы для всех $x \in X \cap U$.*

(3) *Для всякой точки $x \in X$ существуют содержащее ее открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$, открытое подмножество $W \subset \mathbb{R}^k$ и взаимно однозначное гладкое отображение $\psi\colon W \to \mathbb{R}^n$, обладающая тем свойством, что $\psi(W) = X \cap U$ и $\psi'(x)$ инъективно для всех $x \in U$.*

Дословно то же определение можно дать, заменив $\mathbb{R}^n$ на открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Условие (2), очевидно, инвариантно относительно диффеоморфизма; согласно условию (1), пара $(U, X \cap U)$ диффеоморфна паре $(V, H \cap V)$, где $H \subset \mathbb{R}^n$ — линейное подпространство; эта последняя пара, очевидно, услвию (2) удовлетворяет (с координатными функциями в качестве f_i). □

$(2) \Rightarrow (3)$. Поскольку ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

равен $n-k$, один из ее $(n-k)\times(n-k)$-миноров (не ограничивая общности можно считать, что образованный первыми $n-k$ столбцами) отличен от нуля. Пусть $x=(a_1,\dots,a_n)\in X$. Тогда по теореме о неявной функции (теорема 20.1) существуют открытые подмножества $W\subset\mathbb{R}^k$ и $V\subset\mathbb{R}^{n-k}$ и гладкое отображение $\varphi\colon W\to V$, обладающие следующими свойствами: $W\ni(a_{n-k+1},\dots,a_n)$, $V\ni(a_1,\dots,a_{n-k})$, $V\times W\subset U$, и, наконец $(w,v)\in(W\times V)\cap X$ тогда и только тогда, когда $w=\varphi(v)$. Теперь очевидно, что отображение $w\mapsto(w,\varphi(w))$ из W в $\mathbb{R}^n$ является искомым (причем в роли U из условия (3) выступает $V\times W$). $\square$

$(3) \Rightarrow (1)$. Пусть отображение $\psi\colon W\to\mathbb{R}^n$ записывается в координатах формулой

$$(x_1,\dots,x_k)\mapsto(\psi_1(x_1,\dots,x_k),\dots,\psi_n(x_1,\dots,x_k)).$$

Из условия следует, что один из $k\times k$-миноров матрицы $\bigl(\partial\psi_i/\partial x_j\bigr)(x)$ отличен от нуля в точке $w=\psi^{-1}(x)$ (а стало быть, и в ее окрестности). Чтобы не утяжелять обозначения, предположим, что этот минор образован первыми k строками. Рассмотрим теперь отображение $\Psi\colon W\times\mathbb{R}^{n-k}\to\mathbb{R}^n$, определенное по формуле

$$\begin{aligned}(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n)\mapsto&\\ &(\psi_1(x_1,\dots,x_k),\dots,\psi_k(x_1,\dots,x_k),\\ &\quad\psi_{k+1}(x_1,\dots,x_k)+x_{k+1},\dots,\psi_n(x_1,\dots,x_k)+x_n).\end{aligned}$$

Его якобиан в точке $(w,\underbrace{0,\dots,0}_{n-k})$ равен вышеуказанному $k\times k$-минору и тем самым отличен от нуля. Следовательно, по теореме об обратной функции отображение Ψ является диффеоморфизмом на свой образ в некоторой окрестности $V\ni w$; ясно, что

$$\Psi(\{(x_1,\dots,x_n)\in W\mid x_{k+1}=\dots=x_n=0\})=\Psi(V)\cap X.$$

$\square$

Определение 20.3. Замкнутое подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее любому из эквивалентных условий (1)–(3), перечисленных в предложении 20.2, называется *(вложенным) k-мерным подмногообразием в* $\mathbb{R}^n$ (соответствующего класса гладкости).

С многообразиями можно делать более или менее всё то же самое, что мы делали с открытыми подмножествами в $\mathbb{R}^n$: можно рассматривать гладкие функции на многообразиях и гладкие отображения из одного многообразия в другое, можно эти отображения дифференцировать, и т. п. Теория при этом получается более интересная (по той простой причине, что многообразий гораздо больше, чем областей в $\mathbb{R}^n$), но соответствующие понятия надо правильно определить.

Определение 20.4. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — вложенное k-мерное подмногообразие, и пусть $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество, а $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ — диффеоморфизм на открытое множество $\widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$, обладающий тем свойством, что $\widetilde{\varphi}(X \cap \widetilde{U}) = V$, где

$$V = \{(y_1, \dots, y_n) \in \widetilde{V} \mid y_{k+1} = \dots = y_n = 0\}$$

(как в пункте (1) предложения 20.2). Тогда открытое подмножество $U = \widetilde{U} \cap X$ называется *координатной окрестностью* в многообразии X, а ограничение $\varphi = \widetilde{\varphi}|_U\colon U \to V$ называется *локальной картой*, соответствующей этой окрестности.

Замечание 20.5. Из определения ясно, что каждая локальная карта $\varphi\colon U \to V$ является гомеоморфизмом.

Смысл локальных карт в том, что они задают на многообразиях системы координат; при этом в большинстве интересных случаев задать «глобальную» систему координат (то есть устроить так, чтобы $U = X$) не удается: координаты можно ввести только локально, на открытых подмножествах, покрывающих в совокупности все многообразие.

Различные системы координат (иными словами, локальные карты) обладают следующим свойством согласованности:

Предложение 20.6. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — k-мерное подмногообразие, и пусть $\varphi_1\colon U_1 \to V_1$ и $\varphi_2\colon U_2 \to V_2$ — две локальные карты. Если $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, то отображение*

$$\varphi_{12}\colon \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2),$$

заданное формулой $x \mapsto \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x))$, является диффеоморфизмом (открытых подмножеств в $\mathbb{R}^k$).

Доказательство. Пусть $\widetilde{U}_1$, $\widetilde{U}_2$, $\widetilde{V}_1$, $\widetilde{V}_2$, $\widetilde{\varphi}_1$ и $\widetilde{\varphi}_2$ имеют тот же смысл, что в определении 20.4. Поскольку отображения $\widetilde{\varphi}_1\colon \widetilde{U}_1 \to \widetilde{V}_1$ и $\widetilde{\varphi}_2\colon \widetilde{U}_2 \to \widetilde{V}_2$ являются диффеоморфизмами открытых подмножеств в $\mathbb{R}^n$, отображение

$$\widetilde{\varphi}_{12}\colon \widetilde{\varphi}_1(\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2) \to \widetilde{\varphi}_2(\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2),$$

заданное формулой $x \mapsto \widetilde{\varphi}_2(\widetilde{\varphi}^{-1}(x))$, является диффеоморфизмом, как и обратное к нему $\widetilde{\varphi}_{21}$. Поскольку эти диффеоморфизмы переводят пересечение с $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ в пересечение с $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$, их ограничения на эти пересечения также являются взаимно обратными диффеоморфизмами. $\square$

Предложение-определение 20.7. Пусть X и Y — многообразия и $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Отображение f называется *гладким*, если выполнено любое из следующих эквивалентных условий:

(1) Для всякой точки $x \in X$ существуют такие координатные окрестности $U \ni x$ и $U' \ni f(x)$ и локальные карты $\varphi\colon U \to V$ и $\varphi'\colon U' \to V'$, что отображение $g = \varphi' \circ f|_{U\cap f^{-1}(U')} \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap f^{-1}(U'))}$ является гладким (см. диаграмму):

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "f"] & Y \\
U \arrow[ur, hook] \arrow[d, "\varphi"] & U \cap f^{-1}(U') \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[d] & U' \arrow[u, hook] \arrow[d, "\varphi'"] \\
V & \varphi(f^{-1}(U')) \arrow[l, hook'] \arrow[r, "g"] & V'
\end{tikzcd}$$

(2) Для всякой точки $x \in X$ и *любых* координатных окрестностей $U \ni x$ и $U' \ni f(x)$ с локальными картами $\varphi\colon U \to V$ и $\varphi'\colon U' \to V'$ отображение $\varphi' \circ f|_{U\cap f^{-1}(V)} \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U\cap f^{-1}(V))}$ является гладким.

В частности, если $Y = \mathbb{R}$, получаем определение *гладкой функции* на многообразии X.

Доказательство получается непосредственно с использованием того, что замена координат гладка (предложение 20.6).

Если $f\colon X \to Y$ — гладкое отображение гладких многообразий, то имеет смысл говорить о ранге производной отображения f в произвольной точке $x \in X$. Именно, рассмотрим произвольные такие координатные окрестности $U \ni x$ и $U' \ni f(x)$ с локальными картами $\varphi\colon U \to V$

и $\varphi' \colon U' \to V'$; тогда можно говорить о ранге производной отображения $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ (в точке $\varphi(x)$), причем ясно, что этот ранг не зависит от выбора локальных карт: при дркгом выборе композиция $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ умножится слева и справа на диффеоморфизм открытых подмножеств в евклидовых пространствах, а такая операция на ранг повлиять не может.

Разумеется, было бы желательно иметь для случая многообразий не только корректное определение ранга отображения, но и определение производной гладкого отображения в точке x как линейного отображения некоторых векторных пространств. Такую теорию построить действительно можно; мы займемся ею в следующем семестре. Тогда же мы дадим и более удобное для работы определение многообразия.

В заключение приведем определение диффеоморфизма в контексте многообразий.

Определение 20.8. Отображение $f \colon X \to Y$ двух гладких многообразий называется *диффеоморфизмом*, если оно гладко, взаимно однозначно, и обратное к нему отображение $f^{-1} \colon X \to Y$ также гладко.