Лекция 21. Теорема Арцела́–Асколи и дифференциальные уравнения

Представим себе, что каждой точке $a \in \mathbb{R}^m$ сопоставлена прямая $\ell_a \subset \mathbb{R}^m$, проходящая через эту точку (и при этом ℓ_a непрерывно — или, еще лучше, гладко — зависит от a, что бы это ни значило). (Такой объект называется полем прямых на $\mathbb{R}^m$.) Спрашивается, существует ли гладкая кривая $C \subset \mathbb{R}^m$, обладающая тем свойством, что для всякой точки $a \in C$ прямая ℓ_a касается кривой C в этой точке? (Такая кривая называется интегральной кривой данного поля прямых.) Один из фундаментальных результатов теории обыкновенных дифференциальных уравнений гласит, что при правильном уточнении формулировки ответ на этот вопрос всегда положителен. С уточнения формулировки мы и начнем.

Чтобы не отклоняться от традиционных обозначений, положим $m = n+1$. Мы будем доказывать, что интегральная кривая существует локально — в окрестности данной точки. Далее, уж если ℓ_a зависит от a непрерывно (и тем более гладко), то для всякой точки a можно выбрать систему координат $(t, x_1, \dots, x_n)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ таким образом, что ни сама прямая ℓ_a, ни прямые, соответствующие близким к a точкам, не была параллельна гиперплоскости $\{t = 0\}$. Поэтому всякую прямую ℓ_b, где точка $b = (t_0, b_1, \dots, b_m)$ близка к a, можно задать системой уравнений $x_i - b_i = v_i \cdot (t - t_0)$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Гладкость (непрерывность) зависимости ℓ_x от x тогда означает, что коэффициенты v_i гладко (непрерывно) зависят от t и $b_1, \dots, b_m$. Далее, всякую интегральную кривую в окрестности точки b можно представить как отображение $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, производные компонент которого в каждой точке совпадают с соответствующими v_i. Переведя таким образом нашу геометрическую задачу на язык формул, сформулируем точный результат.

Теорема 21.1. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $I \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал и $f_1, \dots, f_n \colon I \times U \to \mathbb{R}$ — набор из n непрерывных функций. Тогда:*

(1) *для всякой пары $(t_0, x_0) \in I \times U$ существует $\varepsilon > 0$ и гладкое (класса C^1) отображение $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \colon (t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon) \to U$, для которого $\varphi(t_0) = x_0$*

$$
\begin{aligned}
\varphi_1'(t) &= f_1(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)),\\
&\dots\\
\varphi_n'(t) &= f_n(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))
\end{aligned}
\tag{21.1}
$$

при всех $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$*;*

(2) *если функции* v_i *принадлежат к классу* C^1, *то отображение* φ, *существование которого утверждается в пункте (1), является единственным.*

Система вида (21.1) называется *системой обыкновенных дифференциальных уравнений* (или еще проще — обыкновенным дифференциальным уравнением), а условие $\varphi(t_0) = x_0$ — начальным условием. Если обозначить $v = (v_1, \ldots, v_n)$, то систему (21.1) можно записать в виде $\varphi'(t) = v(t, \varphi(t))$.

Для доказательства теоремы 21.1 нам понадобится один общий факт из анализа.

Именно, пусть (X, ρ) — компактное метрическое пространство и V — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ с фиксированной нормой $\|\cdot\|$. Обозначим через $C(X, V)$ множество непрерывных отображений $f\colon X \to V$; относительно метрики $\rho(f_1, f_2) = \sup_{x \in X} \|f_1(x) - f_2(x)\|$ множество $C(X, V)$ является, очевидно, полным метрическим пространством.

В формулировке нижеследующей теоремы используется такой термин: подмножество в топологическом пространстве называется *относительно компактным*, если его замыкание компактно.

Теорема 21.2 (Теорема Арцела́–Асколи). *Подмножество* $S \subset C(X, V)$ *относительно компактно тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим условиям:*

(1) существует такое $M > 0$, *что* $\|f(x)\| \leqslant M$ *для всех* $f \in S$ *и* $x \in X$ *(«равномерная ограниченность»);*

(2) для всякого $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что для всякого* $f \in S$ *выполнено неравенство* $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leqslant \varepsilon$, *как только* $\rho(x_1, x_2) \leqslant \delta$ *(«равностепенная непрерывность»).*

Заметим, что всякое отображение $f \in C(X, V)$ автоматически равномерно непрерывно; смысл условия (2) в том, что δ можно выбрать не зависящим не только от x_1 и x_2, но и от выбора $f \in S$.

Доказательство. Мы докажем только более трудную часть «тогда». Итак, предположим, что семейство $S \subset C(X, V)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно; нам надо доказать, что из данной последовательность $\{f_n \in S\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Лемма 21.3. *У последовательности* $\{f_n\}$ *найдется подпоследовательность, сходящаяся поточечно.*

Пусть лемма доказана, и пусть $\{g_m\}$ — подпоследовательность в последовательности $\{f_m\}$, обладающая тем свойством, что предел $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_m(x)$ существует для всякой точки $x \in X$. Заметим, что функция g (равномерно) непрерывна. В самом деле, для данного $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leqslant \varepsilon$, как только $f \in S$ и $\rho(x_1, x_2) \leqslant \delta$. Если $\rho(x_1, x_2) \leqslant \delta$, то, переходя в неравенстве $\|g_m(x_1) - g_m(x_2)\| \leqslant \varepsilon$ к пределу при $m \to \infty$, получим, что $\|g(x_1) - g(x_2) \leqslant \varepsilon\|$. Этим доказана равномерная непрерывность функции g, а значит, и равностепенная непрерывность семейства $S \cup \{g\}$.

Покажем теперь, что на самом деле последовательность $\{g_m\}$ сходится к g равномерно. В самом деле, если это не так, то существуют число $\varepsilon > 0$, возрастающая последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел и последовательность точек $x_k \in x$ с тем свойством, что $\|g_{n_k}(x_k) - g(x_k)\| \geqslant \varepsilon$ для всех k. Поскольку X — компакт, из последовательности $\{x_k\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Меняя соответствующим образом обозначения и переходя к подпоследовательности в $\{g_n\}$, можно считать, что $\lim x_k = x$ и $\|g_k(x_k) - g(x_k)\| \geqslant \varepsilon$ для всех k. Ввиду равностепенной непрерывности семейства, состоящего из всех g_n и g, найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $\rho(x', x'') < \delta$ вытекает, что $\|g_k(x') - g_k(x'')\| < \varepsilon/3$ для всех k и $\|g(x') - g(x'')\| < \varepsilon/3$. Если теперь $\rho(x_k, x) < \delta$, и $\|g_k(x) - g(x)\| < \varepsilon/3$, то еще и $\|g_k(x_k) - g_k(x)\| < \varepsilon/3$, и $\|g(x) - g(x_k)\| < \varepsilon/3$, откуда

$$\|g_k(x_k)-g(x_k)\| \leqslant \|g_k(x_k)-g_k(x)\|+\|g_k(x)-g(x)\|+\|g(x)-g(x_k)\| < 3\cdot\varepsilon/3 = \varepsilon,$$

и получаем противоречие.

Остается доказать лемму 21.3. Проще всего она выводится из сформулированной, но не доказанной нами теоремы Тихонова (теорема 7.3). Именно, обозначим через B замкнутый шар радиуса M и с центром в начале координат в V. Тогда множество *всех* отображений из X в B есть не что иное, как прямое произведение $\prod_{x\in X} B$ (по одному экземпляру шара B для всякой точки $x \in X$); если наделить его топологией произведения, то легко видеть, что последовательность элементов этого произведения сходится в такой топологии тогда и только тогда, когда соответствующая последовательность отображений сходится поточечно. Поскольку B компактно, произведение $\prod_{x\in X} B$ компактно по теореме Тихонова, а значит и секвенциально компактно, так что из *произвольной* последовательности *произвольных* отображений можно выбрать поточечно сходящуюся подпоследовательность (равностепенная непрерывность, и вообще непрерывность элементов семейства S, в этом рассуждении вообще не используется).

Чтобы не ссылаться на недоказанные утверждения, приведем другое доказательство леммы 21.3. Напомним, что подмножество Y в топологическом пространстве X называется *плотным*, если $\bar{Y} = X$.

Лемма 21.4. *Всякое компактное метрическое пространство содержит не более чем счетное плотное подмножество.*

Доказательство леммы 21.4. Канторово множество C (представленное обычным образом как подмножество единичного отрезка) содержит счетное плотное подмножество C', состоящее из конечных троичных дробей, в записи которых не участвует цифра 1. Если X — данное пространство и $f\colon C \to X$ — существующее по теореме 7.6 непрерывное сюръективное отображение, то множество $f(C')$ плотно в X. $\square$

Итак, X содержит счетное плотное подмножество Z.

Лемма 21.5. *У последовательности $\{f_n\}$ найдется подпоследовательность, сходящаяся в каждой точке множества Z.*

Доказательство леммы 21.5. Перенумеруем все точки множества Z: $z_1, z_2, \ldots$. Поскольку шар радиуса M в пространстве V компактен, у последовательности $\{f_n\}$ есть подпоследовательность, сходящаяся в точке z_1; обозначим эту подпоследовательность $\{f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1n}, \ldots\}$. Далее, у последовательности $\{f_{1n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ есть подпоследовательностьсходящаяся в точке z_2. Продолжая по индукции, для каждого $k > 1$ построим последовательность отображений $\{f_{kn}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, сходящуюся в точке z_k и являющуюся подпоследовательностью в последовательность $\{f_{k-1,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Остается заметить, что последовательность $\{f_{nn}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является (начиная с какого-то места) подпоследовательностью в каждой из $\{f_{km}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ и тем самым сходится в каждой из точек z_k. $\square$

Завершим доказательство леммы 21.3. По лемме 21.5 у $\{f_n\}$ есть подпоследовательность $\{g_k\}$, сходящаяся в каждой точке множества Z; покажем, что она сходится и в каждой точке множества X. В самом деле, пусть $x \in X$; покажем, что последовательность $\{g_n(x)\}$ фундаментальна. Для этого зададимся числом $\varepsilon > 0$; в силу равностепенной непрерывности существует такое $\delta > 0$, что $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon/3$, как только $f \in S$, а $\rho(x', x'') < \delta$. Так как Z плотно в X, найдется $z \in Z$, для которого $\rho(x,z)<\delta$; так как последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится, существует такое $N\in\mathbb{N}$, что $\|f_m(z)-f_n(z)\|<\varepsilon/3$, как только $m,n\geqslant N$. Теперь при $m,n\geqslant N$ имеем

$$\|f_m(x)-f_n(x)\|\leqslant\|f_m(x)-f_m(z)\|+\|f_m(z)-f_n(z)\|+\|f_n(x)-f_n(z)\|<3\cdot\varepsilon/3=\varepsilon.$$

Значит, последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна и тем самым сходится. Доказательство закончено. $\square$

В качестве упражнения предлагаем читателю сформулировать и доказать обобщение теоремы Арцела́–Асколи для случая, когда V заменено на произвольное полное метрическое пространство (какой вид примет условие равномерной ограниченности?).

Доказательство части (1) теоремы 21.1. Докажем, что для некоторого $\delta>0$ существует решение на интервале $[t_0;t)$ (для левой половины рассуждения аналогичны). Для этого выберем (замкнутый) отрезок $J\subset I$, содержащий t_0, и замкнутый шар B_r радиуса r с центром в x_0 (относительно L^∞-нормы), содержащийся в U. Пусть $t>t_0$, и пусть $t_0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_n=t$ — разбиение отрезка $[t_0;\tau]$. Будем называть ломаной Эйлера, соответствующей этому разбиению, непрерывное (кусочно-линейное) отображение $f\colon[t_0;t]\to U$, обладающее тем свойством, что $f(\tau_0)=x_0$ и $f(\tau)=f(\tau_i)+(\tau-\tau_i)v(\tau_i,f(\tau_i))$, как только $\tau\in[\tau_i;\tau_{i+1}]$.

Лемма 21.6. *Пусть $M=\sup_{\substack{t\in J\\ x\in B_r}}\|v(t,x)\|$. Тогда при $0<t-t_0<r/M$ (и $[t_0;t]\subset J$) для всякого разбиения отрезка $[t_0;t]$ существует соответствующая ему ломаная Эйлера, образ которой содержится в B_r. Если $f\colon[t_0;t]\to U$ — такая ломаная Эйлера, то $\|f(u')-f(u'')\|\leqslant M|u'-u''|$ для любых $u',u''\in[t_0;t]$.*

Доказательство леммы. Ломаная Эйлера строится по индукции, начиная с τ_0; поскольку шар B_r — выпуклое множество, единственное, что надо проверить, — что все $f(\tau_i)=f(\tau_{i-1})+v(\tau_i,f(\tau_0))$ лежат в B_r. По индукции получаем, что

$$\begin{gathered}\|f(\tau_i)-f(x_0)\|=\|f(\tau_i)-f(\tau_0)\|\leqslant\sum\|f(\tau_j)-f(\tau_{j-i})\|=\\=\sum|\tau_j-\tau_{j-1}|\cdot\|v(\tau_{j-1},f(\tau_{j-1}))\|\leqslant M\sum|\tau_j-\tau_{j-1}|\leqslant M(t-t_0)<r.\end{gathered}$$

Второе утверждение очевидно, если u' и u'' содержатся в одном отрезке разбиения; в общем случае существует последовательность

$u'' < u_1 < \ldots < u_m < u''$, в которой всякие два соседних числа лежат в одном отрезке; из справедливости неравенства для каждой пары соседних чисел вытекает, что оно выполняется и для пары (u', u''). $\square$

Лемма 21.7. *Пусть $0 < t - t_0 < r/M$ и $[t_0; t] \subset J$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует ломаная Эйлера $f\colon [t_0; t] \to r/M$, обладающая тем свойством, что $\|f'(\tau) - v(\tau, f(\tau))\| \leqslant \varepsilon$ для всех τ, для которых производная существует.*

Доказательство леммы. Если $\tau \in (\tau_j; \tau_{j+1})$, то

$$f'(\tau) - v(\tau, f(\tau)) = v(\tau_j, f(\tau_j)) - v(\tau, f(\tau)),$$

причем $\|f(\tau_j) - f(\tau)\| = |\tau - \tau_j| \cdot \|v(\tau_j, f(\tau_j))\| \leqslant M|\tau - \tau_j|$. Ввиду компактности призведения $J \times B_r$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|\tau' - \tau''| < \delta$ и $\|u' - u''\| < M\delta$ имеем $\|v(\tau', u') - v(\tau'', u'')\| < \varepsilon$. Всякая ломаная Эйлера, соответствующая разбиению $[t_0; t]$ на отрезки длиной $< \delta$, будет искомой. $\square$

Всякую ломаную Эйлера, удовлетворяющую условиям этой леммы, будем называть *ε-ломаной.*

Обозначим теперь через S семейство всевозможных 1-ломаных $f\colon [t_0; t] \to B_r$. Из второго утверждения леммы 21.6 следует, что это семейство равностепенно непрерывно в $C(X, \mathbb{R}^n)$, а его равномерная ограниченность очевидна; стало быть, оно относительно компактно. Пусть $\varepsilon_n \to 0$ и f_n — какая-нибудь ε_n-ломаная. Из последовательности $\{f_n\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность; переобозначая, получаем последовательность отображений $f_n\colon [t_0; t] \to B_r$, равномерно сходящуюся к отображению $f\colon [t_0; t] \to \mathbb{R}^n$, причем f_n является ε_n-ломаной для всякого n и $\varepsilon_n \to 0$. Покажем, что f — искомое решение. В самом деле, ввиду формулы Ньютона–Лейбница для этого достаточно показать, что $f(u) = f(t_0) + \int_{t_0}^{u} v(\tau, f(\tau))d\tau$. Заметим, что

$$\left\| f_n(u) - x_0 - \int_{t_0}^{u} v(\tau, f_n(\tau))d\tau \right\| = \left\| \int_{t_0}^{u} f_n'(u) - v(\tau, f_n(\tau))d\tau \right\| \leqslant \varepsilon_n (u - t_0);$$

Устремляя n к бесконечности и переходя в левой части к пределу под знаком интеграла (что законно, например, ввиду теоремы Лебега об ограниченной сходимости), получаем искомое равенство. $\square$

Доказательство части (2) теоремы 21.1. Пусть $B \subset U$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$, содержащий точку x_0. Достаточно доказать, что любые два решения φ_1, φ_2 с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ совпадают на некотором отрезке $J = [t_0, t]$, для которого $\varphi_i(J) \subset B$ (для левой половины рассуждения аналогичны).

Так как v принадлежит к классу C^1, все частные производные ее компонент ограничены на выпуклом компактном множестве $J \times B$. Следовательно, существует такая константа $K > 0$, что $\|v(\tau, x_1) - v(\tau, x_2)\| \leqslant K\|x_1 - x_2\|$ для всех $\tau \in I$ и $x_1, x_2 \in B$ (это следует из задачи, предлагавшейся вам на упражнениях). Положим $\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$. Из равенств $\varphi_i(u) = x_0 + \int_{t_0}^{u} v(\tau, \phi_i(\tau))d\tau$ вытекает, что

$$\|\varphi'(\tau)\| = \|\|v(\tau, \varphi_1(\tau)) - v(\tau, \varphi_2(\tau))\| \leqslant K\|\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)\| = K\|\varphi(\tau)\|. \tag{21.2}$$

Теперь для всякого $\varepsilon > 0$ обозначим через u самую левую точку отрезка $[t_0; t]$, для которой $|\varphi(u)\| \geqslant \varepsilon$. Из неравенства (21.2) вытекает, что

$$\varepsilon = \|\varphi(u)\| \leqslant \int_{t_0}^{u} \|\varphi'(\tau)\|d\tau \leqslant K\varepsilon(u - t_0),$$

откуда $|u - t_0| \geqslant 1/K$. Поскольку правая часть от ε не зависит, получаем, что при $t_0 \leqslant \tau < t_0 + 1/K$ вектор $\varphi(\tau)$ обязан быть нулевым, откуда и $\varphi(u) = 0$, то есть φ — тождественный нуль. $\square$

Если правая часть дифференциального уравнения предполагается только непрерывной, то утверждение о единственности может нарушаться. Например, если (при $n = 1$) уравнение имеет вид $x' = 2\sqrt{|x|}$ (правая часть от t не зависит), то при начальным условиям $(t = t_0, x = 0)$ удовлетворяют как функция $x(t) = \mathrm{sign}(t - t_0) \cdot (t - t_0)^2$, так и функция, тождественно равная нулю.