Лекция 22. Замена переменных в интеграле

Эта лекция посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема 22.1 (о замене переменной). *Пусть $g\colon U \to V = g(U)$ — диффеоморфизм (класса C^1) открытых множеств в R^n и $f\colon V \to \mathbb{R}$ — суммируемая функция. Тогда*

$$\int_V f\,d\mu_n = \int_U (f \circ g)|J(g)|\,d\mu_n, \tag{22.1}$$

где $J(g)$ — якобиан диффеоморфизма g, а μ_n — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Переходя к доказательству, начнем с малого.

Во-первых, условимся о терминологии. Будем называть *параллелепипедом* подмножество $I_1 \times \ldots \times I_n \subset R_n$, где $I_1, \ldots, I_n$ — ограниченные интервалы в $\mathbb{R}$ (с произвольным образом включенными или не включенными концами). Из теоремы Фубини, примененной к характеристической функции параллелепипеда, ясно, что $\mu_n(\Pi) = \mu_1(I_1)\ldots\mu_1(I_n)$: мера параллелепипеда равна его объему. Параллелепипед с равными ребрами будем называть *кубом*.

Предложение 22.2 (геометрический смысл определителя). *Пусть $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный автоморфизм и $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество. Тогда $A(E)$ измеримо и $\mu_n(A(E)) = |\det A|\mu_n(E)$.*

Доказательство.

Лемма 22.3. *Всякое отекрытое подмножество $A \subset \mathbb{R}^n$ можно представить в виде (не более чем) счетного объединения попарно непересекающихся кубов.*

Доказательство. Всюду в этом доказательстве под кубом будем понимать произведение интервалов (равной длины) вида $[a_i; b_i)$.

Сначала рассмотрим всевозможные кубы с ребром единица и с целыми координатами всех вершин и отберем из них те, что содержатся в U. Затем рассмотрим всевозможные кубы с ребром $1/2$ и полуцелыми координатами всех вершин и отберем из них те, что не содержатся ни в одном из уже отобранных и содержатся в U; затем отберем кубы с ребром $1/2^2$ и координатами вершин вида $m/2^2$, где $m \in \mathbb{Z}$, не содержащиеся в ранее отобранных и содержащиеся в U, и т. д. В итоге получится счетное семейство кубов; обозначим их объединение через V и покажем, что $U = V$. В самом деле, если $x \in U \setminus V$, то ввиду открытости

U точка x содержится в каком-то кубе Q с ребром $1/2^k$ и координатами вершин вида $m/2^k$, не включенном в V; выбирая наименьшее k, для которого существует такой куб, получаем противоречие. $\square$

Лемма 22.4. *Если для линейного автоморфизма $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ существует такое число c, что $\mu(A(\Pi)) = c\mu(\Pi)$ для всякого параллелепипеда Π, то $\mu(A(E)) = c\mu(E)$ для всякого измеримого E.*

Доказательство. Из леммы 22.3 следует, что $\mu(A(U)) = c\mu(U)$ для всякого открытого U; следовательно, если обозначить через $\bar{\mu}$ внешнюю меру, то $\bar{\mu}(A(X)) = c\bar{\mu}(X)$ для всякого множества X; в частности, множества меры нуль переводятся в множества меры нуль. Поскольку A — гомеоморфизм, борелевские множества переводятся в борелевские, так что из предложения 16.14 теперь вытекает, что измеримые множества переводятся в измеримые; применяя к измеримым множествам доказанное выше утверждение о внешней мере, получаем искомое. $\square$

Переходя к доказательству предложения, заметим, что если оно верно для операторов $A, B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, то оно верно и для их композиции. Вспомним теперь, что всякая невырожденная $n \times n$-матрица над полем представляется в виде произведения матриц следующих видов:

(1) диагональные матрицы;

(2) матрицы операторов, соответствующих перестановке координат;

(3) матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1 & c & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \;\ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Принимая во внимание лемму 22.4, получаем, что предложение достаточно доказать для отображений вида (1), (2) или (3) в случае, когда $E = \Pi$ — параллелепипед.

Для отображений типа (1) и (2), переводящих параллелепипеды в параллелепипеды, предложение очевидно. В случае (3) заметим, что, если обозначать через $T_b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ параллельный перенос на $b \in \mathbb{R}$, то по теореме Фубини имеем

$$\mu_n(A\Pi) = \int_{\mathbb{R}^{n-2}} d\mu_{n-2}(a) \int_{\mathbb{R}^2} \mu_2(\{a\} \times \mathbb{R}^2 \cap A(\Pi)) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{n-2}} d\mu_{n-2}(a) \int_{I_2} d\mu_2(y)\mu_1(T_{c_1y}(I_1) = \int_{\mathbb{R}^{n-2}} d\mu_{n-2}(a) \int_{I_2} d\mu_2(y)\mu_1(I_1) = \mu_n(\Pi).$$

Поскольку в случае (3) имеем $\det A = 1$, все доказано. □

Теперь докажем ключевой факт.

Предложение 22.5. *Пусть $g\colon U \to V = g(U)$ — диффеоморфизм (класса C^1) открытых множеств в R^n и $Q \subset U$ — куб. Тогда $\mu_n(g(Q)) = \int_Q |\det g'(x)| d\mu_n(x)$.*

Идея доказательства этого предложения очень проста. Именно, разобьем куб Q на много одинаковых маленьких кубиков Q_i и выберем в каждом из них по точке ξ_i. Тогда, поскольку ограничение g на Q_i близко к линейному отображению $h'(\xi_i)$, из предложения 22.2 следует, что

$$\mu_n(g(Q)) = \sum \mu_n(g(Q_i)) \approx \sum |\det h'(\xi_i)|\mu_n(Q_i) \approx \int_Q |\det g'(x)| d\mu_n(x),$$

и «ясно», что если ребро Q_i стремится к нулю, то погрешности в приближенных равенствах стремятся к нулю. Перейдем к аккуратному доказательству.

Условимся меру Лебега в $\mathbb{R}^n$ обозначать просто μ. Далее, через $\|\cdot\|$ будем обозначать евклидову норму в $\mathbb{R}^n$ (корень из суммы квадратов координат). Нормы линейных операторов также будут вычисляться относительно этой нормы.

Сразу же заметим, что предложение 22.5 достаточно доказать для случая, когда $\bar{Q} \subset U$. В самом деле, если $Q \subset U$ — произвольный куб, то $\operatorname{Int} Q$ представляется в видеобъединения монотонно возрастающей последовательности замкнутых кубов, лежащих в U; из справедливости предложения для каждого из этих кубов и теоремы Беппо Леви вытекает, что предложение верно и для Q. Итак, всюду далее считаем, что $\bar{Q} \subset U$.

Лемма 22.6. *Для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, обладающее следующим свойством. Если $M \subset Q$ — куб с ребром, меньшим δ, и с центром c, то*

$$\left| \frac{|\det g'(c)|\mu(M)}{\mu(g(M))} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Вывод предложения 22.5 из леммы. Пусть k — натуральное число. Разобьем куб Q на n^k непересекающихся кубиков M_i одинакового размера; пусть c_i — центр куба M_i. Если для данного $\varepsilon > 0$ имеем $1/k < \delta$, где δ — как в лемме, то

$$\Big|\mu(g(Q)) - \sum |\det g'(c_i)|\mu(M_i)\Big| \leqslant \sum \big|\mu(g(M_i)) - |\det g'(c_i)|\mu(M_i)\big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum \varepsilon\mu(M_i) = \varepsilon\mu(Q).$$

Следовательно,

$$\mu(g(Q)) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k^n} |\det g'(c_i)|\mu(M_i);$$

с другой стороны, поскольку функция $x \mapsto |\det f'(x)|$ равномерно непрерывна на Q, предел в правой части равен $\int_Q |\det f'(x)| d\mu(x)$ (скажем, по теореме Лебега об ограниченной сходимости). $\square$

Остается доказать лемму 22.6. Для этого потребуется известная аккуратность. Чтобы не прерывать нить изложения, начнем еще с одной леммы.

Лемма 22.7. *Пусть $g\colon U \to V = g(U)$ — гомеоморфизм открытых множеств в R^n, и пусть M — куб с центром c и ребром a, для которого $\bar{M} \subset U$; обозначим через ∂M границу куба. Предположим, что $g(c) = c$ и для всех $x \in M$ выполнено неравенство $\|g(x) - x\| < \tau$, где $\tau < a/2$. Тогда*

$$M' \subset g(\mathrm{Int}(M)) \subset g(\bar{M}) \subset M'',$$

где M' (соответственно M'') — открытый куб с центром c и ребром $c - 2\tau$ (соответственно $c + 2\tau$).

Доказательство. Включение $g(\bar{M}) \subset M''$ очевидно; для доказательства второго включения заметим, что $g(\mathrm{Int}(M))$ — открытое множество (так как g — гомеоморфизм), $g(\bar{M})$ — замкнутое множество (ввиду компактности) и $g(\partial M) \cap M' = \varnothing$ (так как ввиду условия все точки из M' находятся слишком далеко от границы). Следовательно,

$$M' = (M' \cap g(\mathrm{Int}(M))) \sqcup (M' \setminus g(\mathrm{Int}(M))) = (M' \cap g(\mathrm{Int}(M))) \sqcup (M' \setminus g(\bar{M})),$$

причем в правой части оба множества открыты. Так как M' связно, одно из этих множеств пусто, а другое совпадает с M'; поскольку $c = g(c) \in g(\mathrm{Int}(M))$, получаем, что $M' = M' \cap g(\mathrm{Int}(M))$. $\square$

Завершение доказательства леммы 22.6. Из того, что диффеоморфизм g гладок класса C^1, вытекает существование такой константы A, что $\|(f'(x))^{-1}\| \leqslant A$ для всех $x \in Q$. Кроме того, из формулы Тейлора 18.2 и компактности Q вытекает существование функции $\eta\colon [0;\delta_0) \to [0;+\infty)$ (для некоторого $\delta_0 > 0$), обладающей тем свойством, что $\lim_{t\to 0}\eta(t) = 0$ и $\|g(x+h) - g(x) - g'(x)h\| \leqslant \eta(\|h\|)\|h\|$, как только $x \in Q$ и $\|h\| \leqslant \delta_0$.

Зададимся теперь числом $\varepsilon > 0$, и пусть $c \in Q$. Рассмотрим отображение $\tilde g\colon x \mapsto c + (f'(c))^{-1}(f(x) - f(c))$.

Ясно, что $g(c) = c$, $\tilde g'(c) = \mathrm{Id}$ и $\|\tilde g(c+h) - c - h\| \leqslant A\eta(\|h\|)\|h\|$, как только $\|h\|$ достаточно мало. Кроме того, из предложения 22.2 следует, что

$$\mu(g(M))/(|\det g'(c)|\mu(M)) = \mu(\tilde g(M))/\mu(M).$$

Существует такое $\delta_1 > 0$, что при $0 < \tau/a \leqslant \delta_1$ выполнены неравенства

$$\left|\left(\frac{a \pm 2\tau}{a}\right)^n - 1\right| < \varepsilon \tag{22.2}$$

Пусть c — центр куба M с ребром a, содержащегося в Q. Если $\eta(a\sqrt{n}) < \delta_1 a/A$, то из леммы 22.7 (в которой надо положить $g = \tilde g$ и $\tau = \delta_1 a$) показывает, что $\tilde g(M)$ заключен между кубами с ребром $a(1+2\delta_1)$ и $a(1-2\delta_1)$ и центром c. Теперь из неравенства (22.2) следует, что

$$\mu(g(M))/(|\det g'(c)|\mu(M)) = \mu(\tilde g(M))/\mu(M) < \varepsilon.$$

Стало быть, лемма 22.6 доказана, а с ней и предложение 22.5. $\square$

Дальнейшее уже просто.

Предложение 22.8. *Предложение 22.5 остается верным, если под Q понимать произвольное измеримое подмножество в U.*

Доказательство. Ввиду леммы 22.3 предложение 22.5 распространяется с кубов на произвольные открытые множества. Далее, поскольку всякое компактное $K \subset U$ представляется в виде пересечения убывающего семейства открытых подмножеств в U (см. первый шаг в доказательстве теоремы 16.15), предложение 22.5 верно и в случае, когда $Q \subset U$ — произвольное компактное подмножество. Если $E \subset U$ — произвольное ограниченное измеримое подмножество, то по теореме 16.15 существуют возрастающая последовательность компактных подмножеств $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots \subset E$ и убывающая последовательность открытых подмножеств $U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n \supset \ldots \supset E$, для которых

$\mu(U_j \setminus K_j) \leqslant 1/j$ при всех j. Отсюда и из теоремы об ограниченной сходимости следует, что

$$\lim_{j\to\infty} \mu(g(U_j \setminus K_j)) = \lim_{j\to\infty} \int_{U_j \setminus K_j} |\det(g'(x))| d\mu(x) = 0,$$

так что множество $g(E)$ также измеримо и

$$\mu(g(E)) = \lim \mu(g(U_j)) = \lim \int_{U_j} |\det(g'(x))| d\mu(x) = \int_E |\det(g'(x))| d\mu(x),$$

так что для E предложение также выполнено. Выполнимость предложения для неограниченных измеримых множеств получится, если представить такое множество в виде счетного дизъюнктного объединения ограниченных. $\square$

Из доказанного предложения вытекает, что теорема 22.1 верна для простых функций; отсюда стандартным рассуждением с использованием теоремы Беппо Леви получается, что она верна для произвольных положительных измеримых функций, а значит — и для произвольных суммируемых функций.