Лекция 24. Пример Уитни

Для справедливости теоремы Сарда существенно, чтобы отображение было не просто гладким, но имело достаточно много непрерывных производных: оказывается, что условие C^r-гладкости, где $r > \max(m-n, 0)$ (для отображений из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$) ослабить уже нельзя. Именно, Х. Уитни для каждого $n > 1$ построил пример C^{n-1}-функции из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, у которой множество критических значений содержит целый отрезок. (Собственно говоря, эти примеры были построены еще до того, как была доказана теорема Сарда.)

В этой лекции мы изложим пример Уитни (с упрощениями). По ходу дела мы познакомимся с конструкциями, которые пригодятся нам и в дальнейшем.

Теорема 24.1 (Уитни). *Для всякого $n > 1$ существует C^{n-1}-гладкая функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, множество критических точек которой содержит отрезок.*

Доказательство начнем с того, что построим компактное множество $C \subset \mathbb{R}^n$ и функцию $f\colon C \to \mathbb{R}$, для которой $f(C) = [0;1]$ и при этом для любых $x_1, x_2 \in C$ выполнено неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M\|x_1 - x_2\|^{n-1+\theta}$, где $M > 0$ и $\theta > 0$ — константы (это последнее условие называется *условием Липшица с показателем* $n - 1 + \theta$).

Мы опишем конструкцию для случая $n = 2$, а затем укажем, какие модификации нужно сделать для произвольного n.

Итак, рассмотрим квадрат $Q = [0;1] \times [0;1] \subset \mathbb{R}^2$, а в нем — четыре квадрата со стороной $1/3$, расположенные параллельно его сторонам на расстоянии $1/9$ от сторон квадрата и друг от друга. Обозначим эти квадраты Q_0, Q_1, Q_2 и Q_3 (начиная с правого нижнего, по часовой стрелке). Для каждого $i \in \{0,1,2,3\}$ рассмотрим преобразование подобия, переводящее Q в Q_i. При этом квадраты Q_0, Q_1, Q_2 и Q_3 перейдут в квадраты, которые мы обозначим Q_{i0}, Q_{i1}, Q_{i2} и Q_{i3} соответственно (рис. 24.5). Итерируем эту конструкцию: если у нас уже построен квадрат $Q_{i_1,\ldots,i_k}$ со стороной $1/3^k$, где все i_m лежат в $\{0,1,2,3\}$, то образ квадрата Q_i относительно преобразования подобия, переводящего Q в $Q_{i_1,\ldots,i_k}$, будет обозначаться $Q_{i_1,\ldots,i_k,i}$. В итоге каждой последовательности $i_1, \ldots, i_k$ элементов множества $\{0,1,2,3\}$ будет поставлен квадрат $Q_{i_1,\ldots,i_k}$ со стороной $1/3^k$.

Обозначим через Π счетное произведение $\{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3\} \times \ldots$ (с топологией произведения, топологии на сомножителях дискретны).

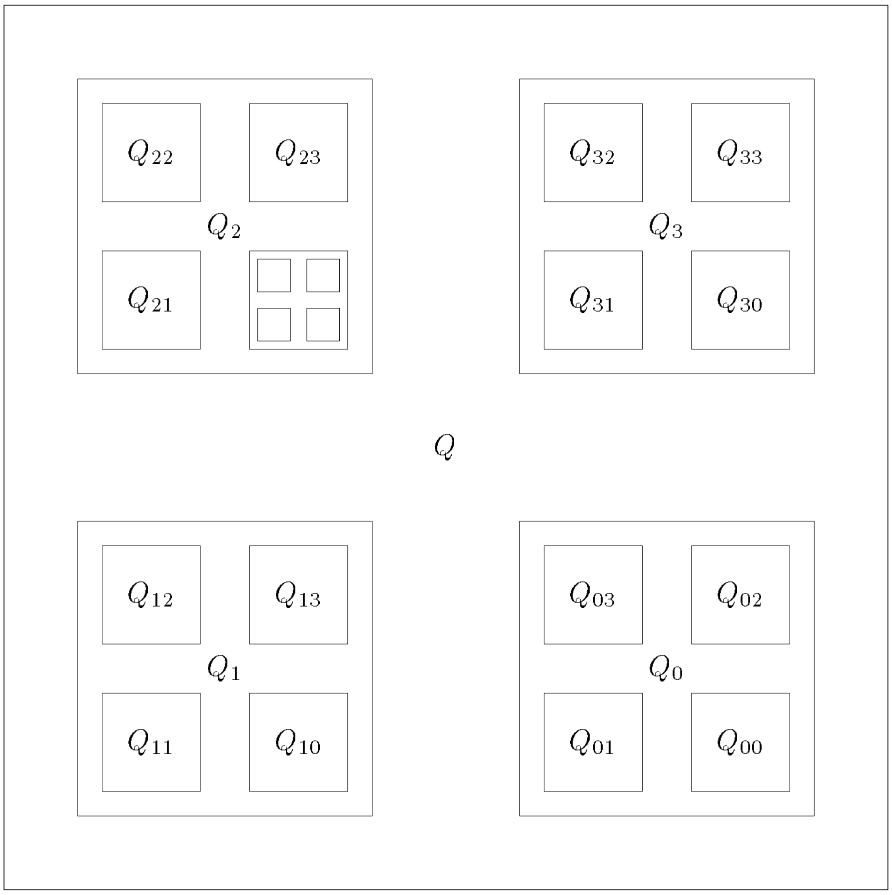

Рис. 24.5. Построение множества C

Всякой бесконечной последовательности $\iota = (i_1, i_2, \ldots) \in \Pi$ поставим в соответствие точку

$$\Psi(\iota) = Q_{i_1} \cap Q_{i_1,i_2} \cap Q_{i_1,i_2,i_3} \cap \ldots.$$

Легко видеть, что отображение Ψ непрерывно и инъективно, и тем самым (ввиду компактности Π) является гомеоморфизмом на свой образ; положим $C = \Psi(\Pi)$. По построению, C гомеоморфно канторову множеству.

Функцию $f\colon C \to \mathbb{R}$ определим следующим образом. Если $x = \Psi(i_1, i_2, \ldots) \in C$, то положим

$$f(x) = \frac{i_1}{4} + \frac{i_2}{4^2} + \ldots + \frac{i_n}{4^n} + \ldots.$$

Равенство $f(C) = [0;1]$ очевидно. Чтобы проверить условие Липшица, предположим, что точки $x_1, x_2 \in C$ лежат в одном и том же квадрате со стороной $1/3^k$, но в разных квадратах со стороной $1/3^{k+1}$. Тогда $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant 1/4^k$, но $\|x_1 - x_2\| \geqslant 1/(9 \cdot 3^k)$. Следовательно,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant 9^{\log_3 4} \cdot \|x_1 - x_2\|^{\log_3 4},$$

и остается заметить, что $\log_3 4 > 1$.

Для произвольного n начнем с куба $[0;1]^n$ и рассмотрим в нем 2^n гомотетичных ему кубов Q_i $(0 \leqslant i \leqslant 2^n - 1)$ с ребром $1/(2+\varepsilon)$ (число $\varepsilon > 0$ выберем позднее); как и прежде, все Q_i содержатся в Q и находятся на равных расстояниях от границ Q и друг от друга. Затем для каждого i рассмотрим преобразование подобия (с коэффициентом $1/(2+\varepsilon)$), переводящее Q в Q_i, и образы кубов Q_j $(0 \leqslant i \leqslant 2^n - 1)$ обозначим через $Q_{ij} \subset Q_i$, и т. д. Счетное произведение множеств $\{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ отобразим в $\mathbb{R}^n$ по правилу

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots\} \mapsto (Q_{i_1} \cap Q_{i_1,i_2} \cap \ldots);$$

Как и прежде, это отображение взаимно однозначно на свой образ и его образ $C \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, гомеоморфный канторову множеству. Отождествляя C с произведением множеств $\{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$, определим функцию $f\colon C \to \mathbb{R}$ по правилу

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots\} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i_k}{(2^n)^k}.$$

Ясно, что $f(C) = [0;1]$; рассуждая так же, как при $n = 2$, получаем, что для некоторого $A > 0$ выполняется соотношение

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant A\|x_1 - x_2\|^{\log_{2+\varepsilon} 2^n}$$

при $x_1, x_2 \in C$. Если выбрать ε настолько малым, что $\log_{2+\varepsilon} 2^n > n - 1$, то все требования будут выполнены.

Явная конструкция C и f нам более не понадобится: теорема 24.1 немедленно следует из возможности такой конструкции и следующего результата (являющегося, в свою очередь, ослабленным вариантом еще одной теоремы Уитни):

Теорема 24.2. *Пусть $C \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество и $f\colon C \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Предположим, что существует такие натуральноечисло $m > 0$ и константы $A > 0$, $\theta > 0$, что $|f(x') - f(x'')| \leqslant A\|x' - x''\|^{m+\theta}$, как только $x', x'' \in C$. Тогда f можно продолжить до функции $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, являющейся гладкой класса C^m и обладающей тем свойством, что $D^\alpha \tilde{f}(x) = 0$ при $x \in C$ и $1 \leqslant |\alpha| \leqslant m$.*

Приступим к доказательству этой теоремы. Начнем с невинного определения.

Определение 24.3. *Носителем* функции $f\colon X \to \mathbb{R}$, где X — топологическое пространство, называется замыкание множества тех точек, в которых f отлична от нуля. Носитель функции f обозначается $\operatorname{supp} f$.

Вот еще одно (очень важное) определение.

Определение 24.4. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. *Разбиением единицы на U* называется семейство функций $\varphi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (индекс i пробегает некоторое множество I), обладающее следующими свойствами.

(1) $\varphi_i(x) \geqslant 0$ для всех x и i, и $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subset U$ для всех i.

(2) Для всякой точки $x \in U$ существует такая окрестность $V \ni x$, что $\operatorname{supp}(\varphi_i) \cap V \neq \varnothing$ лишь для конечного числа индексов i.

(3) Для всякой точки $x \in U$ имеем $\sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1$.

Условие (1) означает, что точки, в которых функция φ_i отлична от нуля, не могут подходить сколь угодно близко к границе множества U. Условие (2), называемое *локальной конечностью*, гарантирует, что сумма из условия (3) содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых.

Разбиения единицы существуют всегда, и в большинстве приложений основное требование к ним — чтобы носители участвующих в нем функций были «достаточно мелкими» в том или ином смысле. Нам сейчас, однако, придется строить разбиение единицы, удовлетворяющее более жестким требованиям.

Ниже через $\mathrm{diam}(E)$ обозначается диаметр множества $E \subset \mathbb{R}^n$, а через $\mathrm{dist}(E_1, E_2)$ — нижняя грань расстояний между точками $x_1 \in E_1$ и $x_2 \in E_2$.

Лемма 24.5. *Пусть $C \subset \mathbb{R}^n$ компактно. Тогда на открытом множестве $U = \mathbb{R}^n \setminus C \subset \mathbb{R}^n$ существует разбиение единицы $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ со следующими свойствами.*

(1) Все φ_i являются C^∞-гладкими, носители всех φ_i компактны, множество I счетно.

(2) Для всякой точки $x \in U$ существует не более чем 2^n индексов $i \in I$, для которых $\varphi_i(x) \neq 0$.

(3) Для всякого $i \in I$ имеем $\mathrm{diam}(\mathrm{supp}\,\varphi_i) \leqslant 2\,\mathrm{dist}(\mathrm{supp}\,\varphi_i, C)$.

(4) Существует такая константа $K > 0$, что для всякого $x \in U$, всякого $i \in I$ и всякого мультииндекса α, для которого $|\alpha| \leqslant m$, имеем

$$|D^\alpha \phi_i(x)| \leqslant K \max(1, 1/(\mathrm{dist}(x, C))^{|\alpha|}).$$

Число 2^n в условии (2) и коэффициент 2 в условии (3) никакого глубокого смысла не имеют: важно только, что в обоих случаях имеется равномерная оценка.

Условие (3) означает, что носители функций φ_i мельчают при подходе к границе, а условие (4) дает оценку на рост частных производных этих функций по мере такого измельчания.

Доказательство леммы. Представим U в виде объединения замкнутых кубов следующим образом. Сначала рассмотрим всевозможные замкнутые кубы с ребром единица (и с ребрами, параллельными координатным осям — далее повторять эту оговорку не будем) и с целыми координатами всех вершин. Отберем из всех этих кубов те кубы Q, у которых $\mathrm{dist}(Q, C) > \mathrm{diam}(Q)$. Затем рассмотрим всевозможные кубы Q с ребром $1/2$ и полуцелыми координатами всех вершин и отберем из них те кубы Q, что не содержатся ни в одном из уже отобранных и обладают свойством $\mathrm{dist}(Q, C) > \mathrm{diam}(Q)$; затем отберем кубы с ребром $1/2^2$ и координатами вершин вида $m/2^2$, где $m \in \mathbb{Z}$, не содержащиеся в ранее отобранных и такие, что их расстояние до C не меньше диаметра, и т. д. В итоге получится счетное семейство кубов $\{Q_i\}$.

Будем называть отобранные кубы с ребром $1/2^r$ кубами ранга r; диаметр куба ранга r равен $\sqrt{n}/2^r$. Объединение кубов рангов $\leqslant r$ обозначим через F_r.

Лемма 24.6. (1) *Если два отобранных куба имеют непустое пересечение, то их ранги отличаются не более чем на единицу.*

(2) *Для всякого отобранного куба Q имеем $\operatorname{diam}(Q) \leqslant \operatorname{dist}(Q, C)$; если Q — куб ранга, большего нуля, то $\operatorname{dist}(Q, C) \leqslant 2\operatorname{diam}(Q)$.*

(3) *Если $x \in U \setminus F_r$, то $\operatorname{dist}(x, C) \leqslant 2 \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^r}$.*

(4) *Объединение всех отобранных кубов совпадает с U.*

Доказательство леммы 24.6. Докажем индукцией по r следующее утверждение: если два куба ранга $\leqslant r$ имеют непустое пересечение, то их ранги отличаются не более чем на единицу. В самом деле, при $r = 1$ доказывать нечего; для перехода от r к $r + 1$ заметим, что если $x \in \partial(F_r)$, то по построению существует куб Q с ребром $1/2^r$ (и вершинами с координатами вида $k/2^r$, $r \in \mathbb{Z}$), содержащий x, не содержащийся в F_r и содержащиеся в U; следовательно, при отборе кубов ранга $r+1$ будет отобран куб, содержащийся в Q и содержащий x (так как его расстояние до C будет больше, чем $\sqrt{n}/2^{r+1}$. Этим доказано утверждение (1).

Далее, по построению имеем $\operatorname{diam}(Q) \leqslant \operatorname{dist}(Q, C)$ для всякого отобранного куба; кроме того, $\operatorname{dist}(F_r, C) \leqslant 2 \cdot (\sqrt{n}/2^r)$ (в правой части стоит удвоенный диаметр куба ранга r), так как в противном случае можно было бы добавить еще один куб ранга r, откуда вытекает (2).

Утверждение (3) следует из того, что если данное неравенство не выполнено, то точка x была бы включена в какой-нибудь куб ранга $\leqslant r$). Переходя к пределу при $r \to \infty$ в утверждении (3), получаем (4). □

Зафиксируем теперь какую-нибудь C^∞-функцию ψ, принимающая только неотрицательные значения, для которой $\operatorname{supp}(\psi) = [-1/(2 \cdot 1.1); 1/(2 \cdot 1.1)]^n$ (такая функция существует ввиду предложения 23.1; коэффициент 1.1 означает «немножко больше единицы»).

Пусть c_i — центр куба Q_i и $2l_i$ — длина его ребра; положим $\phi_i(x) = \psi((x - c_i)/l_i)$. Заметим, что $\operatorname{supp}\phi_i$ — это куб, получающийся из Q_i гомотетией с коэффициентом 1.1 относительно его центра; поэтому если заменить в лемме φ_i на ϕ_i, то ввиду леммы 24.6 условия (1)–(3) будут выполнены, за тем исключением, что $\sum_{i \in I} \phi_i(x)$ не обязана тождественно равняться единице. Этот недостаток исправляется с помощью следующего стандартного приема: поскольку функция ϕ_i не обращается в нуль на кубе Q_i, для всякой точки $x \in U$ сумма $\sum_i \phi_i(x)$ положительна; положим теперь

$$\varphi_i(x) = \frac{\phi_i(x)}{\sum_{j\in I} \phi_j(x)}.$$

Множества нулей (и тем самым носители) у функций φ_i и ϕ_i совпадают, и при этом $\sum_{i\in I} \varphi_i(x) = 1$ для всякого $x \in U$; тем самым мы добились выполнения условий (1)–(3).

Займемся условием (4). Пусть

$$K_1 = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ |\alpha|\leqslant m}} |D^\alpha \psi(x)|.$$

Если $\operatorname{supp} \phi_i$ соответствует кубу ранга k, то, очевидно,

$$|D^\alpha \phi_i(x)| \leqslant 2^{|\alpha|} K_1 = K_2/(\operatorname{diam}(\operatorname{supp} \phi_i))^{|\alpha|},$$

где K_2 — некоторая константа.

Перейдем от ϕ_i к φ_i. Для этого обозначим через $\delta > 0$ наименьшее значение функции ψ на кубе $[-1/2; 1/2]^n$ (имеем, стало быть, $\phi_i(x) \geqslant \delta$, если $x \in Q_i$), а через L — наибольшее значение функции ψ. Воспользуемся следующим утверждением, тривиально проверяемым с помощью индукции по порядку производной:

Лемма 24.7. *Если u и v — гладкие функции n переменных и α — мультииндекс, то*

$$D^\alpha \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\sum_{|\beta|+|\gamma|\leqslant|\alpha|} C_{\beta,\gamma} D^\beta u \cdot D^\gamma v \cdot v^{n_{\beta\gamma}}}{v^{2|\alpha|}}, \tag{24.1}$$

где $C_{\beta,\gamma} \in \mathbb{Z}$ и $n_{\beta\gamma} \in \mathbb{N}$ — абсолютные константы.

Запишем теперь равенство $\varphi_i(x) = \phi_i / \sum_j \varphi_j(x)$ и обозначим в нем числитель через u, а знаменатель через v. Поскольку всякий $x \in U$ лежит в каком-то из кубов Q_i (лемма 24.6(3)), имеем $\phi_i(x) \geqslant \delta$, откуда $v(x) \geqslant \delta$. Займемся числителем формулы (24.1). Ввиду уже доказанного утверждения (2) число ненулевых слагаемых в сумме $v(x) = \sum \phi_j(x)$ не превосходит 2^n, а ввиду леммы 24.6 имеем $\operatorname{diam}\operatorname{supp} \varphi_j \geqslant \operatorname{diam}\operatorname{supp} \varphi_i/2$, как только $\varphi_j(x) \neq 0$. Следовательно, при $|\gamma| \leqslant m$ имеем

$$|D^\gamma v(x)| \leqslant 2^n K_2 \cdot 2^m/(\operatorname{diam}(\operatorname{supp} \phi_i))^{|\gamma|} = K_3/(\operatorname{diam}(\operatorname{supp} \phi_i))^{|\gamma|}.$$

Кроме того, мы знаем, что $|D^\beta u(x)| \leqslant K_2/(\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\phi_i))^{|\gamma|}$. Поэтому если $\operatorname{supp}\varphi_i$ соответствует кубу ранга 1, то $|D^\alpha\varphi_i(x)|$ не превосходит некоторой абсолютной константы. Если же $\operatorname{supp}\varphi_i$ соответствует кубу ранга > 1, то $\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\phi_i) \leqslant 1$; наконец, если $n_{\beta\gamma} \leqslant N$ при $|\beta|+|\gamma| \leqslant m$, а $|\psi(x)|$ ограничен сверху числом $C \geqslant 1$, то $|v^{n_{\beta\gamma}}|$ ограничен сверху абсолютной константой, а именно, C^N. Поэтому в числителе формулы (24.1) и общее число слагаемых, и абсолютные величины коэффициентов ограничены при $|\alpha| \leqslant M$ абсолютными константами, так что

$$|D^\alpha\varphi_i(x)| \leqslant K_4/(\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\phi_i))^{|\alpha|}. \tag{24.2}$$

Рассмотрим теперь ранги кубов Q_i, соответствующих тем φ_i, для которых $\varphi_i(x) \neq 0$. По лемме 24.6(1) ранги этих кубов либо все одинаковы и равны некоторому числу r, либо принимают два значения: r и $r+1$. Если $r = 0$, то из (24.2) следует, что $|D^\alpha\varphi_i(x)| \leqslant K_4/0.55^{|\alpha|} = K_5$; в противном случае $x \notin F_{r-1}$, откуда по лемме 24.6(3) получаем, что

$$\operatorname{dist}(x, C) \leqslant \sqrt{n}/2^r \leqslant 2\operatorname{diam}(\operatorname{supp}(\varphi_i)),$$

так что $1/\operatorname{diam}(\operatorname{supp}(\varphi_i)) \leqslant 2/\operatorname{dist}(x, C)$ и ввиду (24.2) получаем, что

$$|D^\gamma v(x)| \leqslant 2^{|\alpha|}K_4/(\operatorname{dist}(x, C)^{|\alpha|}).$$

Стало быть, утверждение (4) выполнено при $K = \max(K_5, 2^{|\alpha|}K_4)$, чем доказательство леммы 24.5 и завершается. $\square$

Доказательство теоремы 24.2. Пусть $\{\varphi_i\}$ — разбиение единицы из леммы 24.5. Положим для произвольной точки $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\tilde f(x) = \begin{cases} \sum_{i\in I} f(a_i)\varphi_i(x), & x \notin C \\ f(x), & x \in C. \end{cases} \tag{24.3}$$

(сумма в правой части конечна ввиду локальной конечности разбиения единицы) и покажем, что функция $\tilde f$ является искомой. Покажем, что функция $\tilde f$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$. Для этого надо доказать, что $\lim_{x\to a}\tilde f(x) = f(a)$ для всякой точки $a \in C$. Заметим, что для $x \in U$ имеем

$$|f(a) - \tilde f(x)| = \left| f(a)\sum_{i\in I}\varphi_i(x) - \sum_{i\in I} f(a_i)\varphi_i(x)\right| \leqslant \sum_{i\in I}|f(a) - f(a_i)|\varphi_i(x). \tag{24.4}$$

Если какое-то из слагаемых в правой части отлично от нуля, то $x \in \operatorname{supp}\varphi_i$. Как мы помним, для всякого $i \in I$ в точке $a_i \in C$ реализуется минимум расстояний между точками множеств C и $\operatorname{supp}\varphi_i$.

Лемма 24.8. *Если $x \in \operatorname{supp}\varphi_i$ и $a \in C$, то $\|a_i - a\| \leqslant 4\|x - a\|$.*

Доказательство леммы. Выберем точки $y_i \in \operatorname{supp}\varphi_i$, в которых реализуется минимум расстояний между точками множеств $\operatorname{supp}\varphi_i$ и C. Заметим, что

$$\begin{gathered}\|a - a_i\| \leqslant \|a - y_i\| + \|y_i - x\| + \|x - a\| \leqslant \\ \leqslant \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\varphi_i, C) + \operatorname{diam}(\operatorname{supp}\varphi_i) + \|x - a\| \leqslant 3\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\varphi_i, C) + \|x - a\|\end{gathered}$$

(мы воспользовались условием (3) из леммы 24.5); поскольку $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\varphi_i, C) \leqslant \|x - a\|$, лемма доказана. ☐

Воспользуемся теперь тем, что функция f удовлетворяет условию Липшица (впрочем, на данном этапе хватило бы и равномерной непрерывности): если $\|x - a\| \leqslant \varepsilon$, то $\|a_i - a\| \leqslant 4\varepsilon$ ввиду леммы, откуда $|f(a) - f(a_i)| \leqslant A(4\varepsilon)^{m+\theta}$. Применяя во внимание, что ввиду леммы 24.5(3) число ненулевых слагаемых в правой части (24.4) не превосходит 2^n и заменяя каждое из этих слагаемых на не меньшее его слагаемое $A(4\varepsilon)^{m+\theta}\varphi_i(x)$, получим, что если $\|x - a\| \leqslant \varepsilon$, то $|f(a) - f(x)| \leqslant 2^n A(4\varepsilon)^{m+\theta}$, что стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Итак, непрерывность $\tilde f$ доказана.

Докажем, наконец, что $\tilde f$ является C^m-гладкой, а ее частные производные порядка $\leqslant m$ в точках C равны нулю. Заметим, что функция $\tilde f$ гладка (и даже бесконечно гладка) вне C. Легко видеть, что для доказательства оставшегося утверждения достаточно проверить, что каждая частная производная порядка $\leqslant m$ функции $\tilde f|_U$, будучи продолженной нулем на C, станет непрерывной функцией на всем $\mathbb{R}^n$.

Зафиксируем мультииндекс α, где $|\alpha| \leqslant m$. Нам надо доказать, что если $a \in C$, то $\lim_{\operatorname{dist}(x,C)\to 0} D^\alpha \tilde f(x) = 0$.

Пусть $x \in U$, и пусть $a \in C$ — точка, в которой достигается минимум расстояния от x до точек C. Поскольку $\sum_i \varphi_i(x) = 1$ для всякого x, имеем $\sum_i D^\alpha\varphi_i(x) = 0$ для всякого x (в этом месте используется локальная конечность). Поэтому

$$|D^\alpha \tilde f(x)| = \left|\sum_i f(a_i) D^\alpha\varphi_i(x) - \sum_i f(a) D^\alpha\varphi_i(x)\right| \leqslant \sum_i |f(a_i) - f(a)| \cdot |D^\alpha\varphi_i(x)|. \tag{24.5}$$

Лемма 24.8 показывает, что $\|a_i - a\| \leqslant 4\|x - a\| = 4\operatorname{dist}(x, C)$. Следовательно, $|f(a_i) - f(a)| \leqslant A \cdot \cdot 4^{m+\theta}(\operatorname{dist}(x, C))^{m+\theta}$. С другой стороны, из условия (4) леммы 24.5 следует, что

$|D^\alpha \varphi_i(x)| \leqslant K \max(1, 1/(\mathrm{dist}(x,C))^{|\alpha|})$. Наконец, количество слагаемых в правой части (24.5) не превосходит 2^n ввиду условия (2) леммы 24.5. Стало быть,

$$|D^\alpha \tilde{f}(x)| \leqslant 2^n \cdot A \cdot 4^{m+\theta} (\mathrm{dist}(x,C))^{m+\theta} \cdot K \max(1, 1/(\mathrm{dist}(x,C))^{|\alpha|}).$$

Поскольку $|\alpha| \leqslant m$, правая часть стремится к нулю при $\mathrm{dist}(x,C) \to 0$. Теорема доказана. $\square$