Анализ, 2 семестр (весна 2007)
Экзамен 13 мая 2007
На работу отводится 4 часа
Разрешается пользоваться записками лекций и своими записями

1. Пусть $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ — ненулевой многочлен и

$$V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) = 0\}.$$

Покажите, что множество V имеет нулевую меру.

2. Является ли гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^2$ подмножество, заданное уравнением $y^2 = x^3$?

3. Пусть $S \subset \mathbb{R}^2$ — окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Зададим меру на S, перенеся меру Лебега на интервале $[0;1)$ с помощью биекции $t \mapsto e^{2\pi i t}$. Положим

$$T = \{(A, B, C) \in S \times S \times S \mid \text{треугольник } ABC \text{ тупоугольный}\}.$$

Найдите меру множества T.

4. Пусть

$$f(x,y) = \sqrt[3]{(1+x)^2 + (1+y)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2 + (1-y)^2} + \\ + \sqrt[3]{(1-x)^2 + (1+y)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2 + (1-y)^2}.$$

Имеется ли у функции f в точке $(0;0)$ локальный экстремум, и если да, то какой?

5. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество и $f\colon K \to [0;1]$ — отображение, обладающее тем свойством, что $|f(x) - f(y)| \leqslant \|x - y\|^{n+1}$ для всяких $x, y \in K$ (через $\|\cdot\|$ обозначена евклидова норма). Докажите, что f не является сюръективным (не пользуясь, по возможности, утверждениями, не доказанными в курсе).