Анализ, листок 1 (весна 2007, 2 семестр)

Мера Лебега на прямой

1. Пусть I — несчетное множество индексов и $\{a_i\}_{i\in I}$ — семейство положительных чисел, пронумерованное элементами I. Докажите, что

$$\sup_{\substack{S\subset I\\ S \text{ конечно}}} \sum_{j\in S} a_j = +\infty.$$

Пусть $\mathcal{B}$ — σ-алгебра подмножеств в множестве X. Отображение $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется измеримым (относительно $\mathcal{B}$), если прообраз всякого борелевского подмножества в $\mathbb{R}$ является элементом $\mathcal{B}$. Аналогично определяется измеримое отображение в произвольное топологическое пространство.

2. Покажите, что функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ измерима тогда и только тогда, когда измеримы все множества $f^{-1}[a;+\infty)$ для $a \in \mathbb{R}$; то же — с заменой $f^{-1}[a;+\infty)$ на $f^{-1}(a;+\infty)$.

3. Пусть $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ для всякого $x \in X$, и пусть все $f_n : X \to \mathbb{R}$ измеримы. Докажите, что f измерима.

4. Пусть $f\colon [0;1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Определим функцию $g\colon \mathbb{R} \to [0;+\infty]$ по формуле $g(c) = \operatorname{card}(f^{-1}(c))$. Покажите, что g измерима (относительно σ-алгебры борелевских подмножеств в $\mathbb{R}$).

5. а) Найдите лебеговскую меру множества чисел из отрезка $[0;1]$, в десятичной записи которых не встречается цифра 7.

б) Найдите лебеговскую меру множества чисел из отрезка $[0;1]$, в десятичной записи которых не встречается сочетание цифр 2007.

6. Пусть $E \subset [0;1]$ — измеримое по Лебегу множество, обладающее тем свойством, что для всякого отрезка $[a;b] \subset [0;1]$ имеем $\mu(E\cap[a;b]) = (b-a)\mu(E)$. Докажите, что $\mu(E)$ равна нулю или единице.

7. а) Покажите, что на кольце целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ существует мера μ, определенная на σ-алгебре борелевских подмножеств и обладающая следующими свойствами: (1) $\mu(a+B) = \mu(B)$ для всякого борелевского $B \subset \mathbb{Z}_p$ и всякого $a \in \mathbb{Z}_p$; (2) $\mu(\mathbb{Z}_p) = 1$. Через $a+B$ обозначается множество $\{a+x \mid x \in B\}$.

б) Покажите, что мера, о которой идет речь в пункте (а), единственна.

8. Пусть $C \subset [0;1]$ — «классическое» канторово множество (полученное удалением средних третей отрезков). Докажите, что на $[0;1]$ существует мера ν (определенная на σ-алгебре борелевских подмножеств) со следующими свойствами: (1) $\nu(B) = \nu(B\cap C)$ для всякого борелевского $B \subset [0;1]$; (2) $\nu(X) = 0$, если X — конечное множество; (3) $\nu([0;1]) > 0$.

9. Существует ли непостоянная непрерывная функция $f\colon [0;1] \to \mathbb{R}$, обладающая тем свойством, что для всех $x \in [0;1]$, кроме некоторого множества лебеговой меры нуль, производная $f'(x)$ существует и равна нулю?