Анализ, листок 2 (весна 2007, 2 семестр)

Мера и интеграл Лебега

1. Докажите, что семейство всех борелевских подмножеств отрезка $[0;1]$ имеет мощность континуум.

2. Докажите, что в $\mathbb{R}$ существуют измеримые (по Лебегу) подмножества, не являющиеся борелевскими.

3. Приведите пример нигде не плотного (и измеримого) подмножества отрезка, имеющего положительную меру.

4. Для каждого $\varepsilon \in [0;1]$ постройте измеримое подмножество $E \subset [0;1]$, для которого $\bar{E} = [0;1]$ и $\mu(E) = \varepsilon$.

5. Пусть $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность измеримых подмножеств пространства с мерой (X,μ), для которой $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) < \infty$. Докажите, что почти все $x \in X$ содержатся только в конечном числе множеств E_i.

6. Найдите $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx$.

7. Пусть f — суммируемая (относительно меры Лебега) функция на отрезке $[a;b]$. Докажите, что функция

$$x \mapsto \int_{[a;x]} f(t)dt$$

непрерывна.

8. Для $x \in (0;1)$ и $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $f(x)$ количество семерок среди первых n знаков после запятой в десятичной записи числа x. Докажите, что для почти всех $x \in (0;1)$ имеем $\lim_{n\to\infty} f(n)/n = 1/10$.

9. Найдите меру множества чисел на интервале $(0;1)$, в десятичной записи которых первая двойка встречается раньше первой тройки.