Анализ, листок 4 (весна 2007, 2 семестр)

Производная

В задачах, в которых требуется найти производные отображений, следует по возможности записывать соответствующие линейные отображения «в инвариантном виде» (не используя базиса). Утверждения про $o(\cdot)$ надо обосновывать.

1. Существует ли дифференцируемое отображение $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, отображающее ось абсцисс на график функции $y = |x|$?

2. Пусть отображение $f\colon \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ действует по формуле $A \mapsto A^2$. Найдите $f'(X)$ для данной матрицы X.

3. Пусть $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ — открытое подмножество, состоящее из невырожденных матриц, и $g\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ действует по правилу $A \mapsto A^{-1}$. Найдите $g'(X)$ для данной $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

4. а) Пусть $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — отображение, действующее по формуле $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ (все $a_i \in \mathbb{C}$ — константы). Найдите $f'(a)$ для данного $a \in \mathbb{C}$.

б) То же задание для функции $f(z) = \sin z$.

в) Пусть снова f — то же, что в пункте (а). Найдите производную в точке $a \in \mathbb{C}$ отображения из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{R}$, заданного формулой $z \mapsto |f(z)|^2$.

5. Пусть отображение $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ задается по правилу $z \mapsto |z|$.

а) Для каких $z \in \mathbb{C}$ оно дифференцируемо?

б) Чему может равняться ранг его производной в тех точках, где оно дифференцируемо?

6. Пусть $\mathbb{R}^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ и $p \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}$. Для точки $x \in \mathbb{R}^n$ положим $\pi_p(x) = \overline{p, x} \cap \mathbb{R}^{n-1}$. (Через $\overline{p, x}$ обозначена прямая, соединяющая p и x; точка $\pi_p(x)$ определена, разумеется, не для всех x, но для x, принадлежащих некоторому открытому подмножеству $U \subset \mathbb{R}^n$.) Чему может равняться ранг $\pi_p'(x)$ для различных $x \in U$?

7. Отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие набору чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ коэффициенты многочлена $(X - x_1)\ldots(X - x_n)$. Найдите ранг $f'(a_1, \ldots, a_n)$ для данной точки $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$.

8. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное выпуклое подмножество. Пусть отображение $f\colon \mathbb{R}^n \setminus K \to \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие точке $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ току $y \in K$, ближайшую к x (почему эта точка единственна?). Верно ли, что отображение f всюду дифференцируемо для всякого выпуклого компакта K?

9*. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство, для которого единичный шар $\{v \mid \|v\| \leqslant 1\}$ компактен. Докажите, что $\dim E < \infty$.