Анализ, листок 5 (весна 2007, 2 семестр)

О высших производных и прочем

1. Для функции f, заданной на (открытом подмножестве в) $\mathbb{R}^2$ (с координатами x и y), ее *лапласиан* задается формулой $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$. Выразите Δf через полярные координаты (r, φ) и производные f по этим координатам.

2. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Функция $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ называется *однородной степени* α, если для всякого $t > 0$ выполнено тождество $f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \ldots, x_n)$.

а) Докажите, что если f — функция класса C^1, однородная степени α, то выполнено тождество

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha f.$$

б) Верно ли обратное утверждение?

3. Пусть F — однородный многочлен степени p от $x_1, \ldots, x_n$, и пусть q — целое положительное число, меньшее p. Докажите тождество

$$\sum_{|\alpha|=q} \frac{D^\alpha F(a_1, \ldots, a_n) x^\alpha}{\alpha!} = \sum_{|\beta|=p-q} \frac{D^\beta F(x_1, \ldots, x_n) a^\beta}{\beta!}.$$

4. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция класса C^2, у которой все частные производные первого порядка в начале координат равны нулю. Положим $a_{ij} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$.

а) Пусть матрица (a_{ij}) положительно определена. Докажите, что в начале координат у функции f имеется локальный минимум.

б) Пусть матрица (a_{ij}) имеет сигнатуру $(2, n-2)$ (причем $n > 2$). Докажите, что в начале координат у функции f локального экстремума нет.

в) Пусть матрица (a_{ij}) имеет сигнатуру $(n-1, 0)$. Что можно сказать о наличии экстремума у f в начале координат?

5. а) Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое открытое множество и $f\colon U \to \mathbb{R}$ — функция класса C^1. Предположим, что все частные производные функции f ограничены на U. Докажите, что существует такое $K > 0$, что $|f(p) - f(q)| \leqslant K\|p - q\|$ для любых $p, q \in U$.

б) Останется ли верным утверждение пункта (а), если вместо выпуклости множества U потребовать только, чтобы U было связным?

6. Приведите пример C^1-отображения $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, не являющегося диффеоморфизмом на свой образ, но обладающего тем свойством, что $f'(x)$ невырождено при всех $x \in \mathbb{R}^n$.

7. Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство и $f\colon X \to X$ — отображение.

а) Предположим, что существует такое $\lambda \in (0; 1)$, что $\rho(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \lambda\rho(x_1, x_2)$, как только $x_1 \neq x_2$. Докажите, что у отображения f существует неподвижная точка (т. е. такое $x \in X$, что $f(x) = x$).

б) Пусть известно лишь то, что $\rho(f(x_1), f(x_2)) < (x_1, x_2)$, как только $x_1 \neq x_2$. Покажите, что в этой ситуации у отображения f неподвижной точки может не быть.

в) Пусть в условиях пункта (б) пространство X компактно. Всегда ли в этой ситуации у f есть неподвижная точка?