Анализ, листок 6 (весна 2007, 2 семестр)

Неявные функции и подмногообразия в $\mathbb{R}^n$

1. Является ли график функции $y = |x|$ гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^2$?

2. Уравнение $x + y + x^5 - y^5 = 0$ задает в окрестности начала координат y как функцию от x; обозначим ее $y = \varphi(x)$.

а) Найдите $\varphi^{(5)}(0)$.

б) Найдите $\varphi^{(2004)}(0)$.

3. Пусть a_n — наименьший положительный корень уравнения $x^5 + 1 = nx$. Найдите три первых непостоянных члена асимптотики последовательности $\{a_n\}$ при $n \to \infty$.

4. Пусть $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ — функция класса C^1, у которой в точке $a \in \mathbb{R}^n$ все частные производные отличны от нуля. Тем самым в окрестности точки a координата x выражается как функция от y и z, y выражается как функция от x и z, а z выражается как функция от x и y. Упростите выражение

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

5. Пусть $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ — сфера, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, и $p\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ — проекция $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Чему равен ранг производной отображения p в различных точках сферы?

6. Через $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ обозначим множество $n\times n$-матриц с действительными коэффициентами. Покажите, что следующие подмножества в $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ (отождествляемом с $\mathbb{R}^{n^2}$) являются подмногообразиями:

а) специальная линейная группа

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det(X) = 1\};$$

б) ортогональная группа

$$O_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid {}^tXX = I\}$$

(через ${}^tX$ обозначена матрица, транспонированная к X, а через I — единичная матрица).

7. Положим

$$U_n = \{X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid \overline{{}^tX}X = I\}$$

(унитарная группа). Покажите, что U_n — гладкое подмногообразие в $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ (отождествляемом с $\mathbb{R}^{2n^2}$).

8. Пусть $X \subset \mathbb{C}^3$ — подмножество, заданное системой уравнений

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1,$$
$$z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 = 0.$$

Покажите, что X — гладкое подмногообразие в $\mathbb{C}^3$ (отождествляемом с $\mathbb{R}^6$).