Анализ, листок 7 (весна 2007, 2 семестр)

Дифференциальные уравнения; замена переменной в интеграле

1. Пусть X — компактное метрическое пространство и $C(X)$ — пространство непрерывных функций на нем с sup-нормой. Пусть $S \subset C(X)$ — относительно компактное подмножество. а) Покажите, что S равномерно ограничено. б) Покажите, что S равностепенно непрерывно.

2. Нарисуйте на плоскости интегральные кривые уравнения $x' = x^2$.

3. Пусть в дифференциальном уравнении $x' = v(t, x)$ правая часть имеет класс гладкости C^1. Полкажите, что на достаточно малом отрезке $[t_0; t_0+h]$ ломаные Эйлера с начальными условиями (t_0, x_0) равномерно сходятся к решению уравнения с теми же начальными условиями, когда максимальная длина отрезка разбиения (по которому строится ломаная) стремится к нулю.

4. Пусть $x' = v(t, x)$ — дифференциальное уравнение с непрерывной правой частью, определенной на всем $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Предположим, что существуют такие константы $C_1, C_2 > 0$, что $\|v(t, x)\| \leqslant C_1\|x\| + C_2$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Покажите, что для любых начальных условий (t_0, x_0) существует решение уравнения с данными начальными условиями, определенное на всем $\mathbb{R}$.

5. а) Найдите $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$. (Указание: перейдите к полярным координатам.)

б) Найдите $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$.

в) Пусть $\|q_{ij}\|$ — симметрическая положительно определенная матрица; положим $Q(x) = \sum q_{ij} x_i x_j$. Найдите $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)} dx_1 \dots dx_n$.

6. Найдите объем единичного шара (относительно обычной евклидовой нормы) в $\mathbb{R}^n$. (Указание: удобно вычислять по индукции, переходя от n к $n+2$.)

7. Пусть $B_n \subset \mathbb{R}^n$ — единичный шар относительно евклидовой нормы. а) При каких $\alpha > 0$ конечен интеграл $\int_{B_n} \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\mu_n(x)$? б) Найдите этот интеграл.