Анализ, листок 8 (весна 2007, 2 семестр)

Свойства гладких отображений

1. Пусть $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$ — два непересекающихся замкнутых подмножества. Докажите, что существует бесконечно гладкая функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами: $f(x) = 1$ для всех $x \in F_1$, $f(x) = 0$ для всех $x \in F_2$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ для всех x.

2. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество, $U \supset F$ — открытое множество и $f\colon U \to \mathbb{R}$ — функция класса C^k $(0 < k \leqslant \infty)$. Докажите, что существует функция $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (также класса C^k), обладающая тем свойством, что $\widetilde{f} = f$ на некотором открытом множестве, содержащем F.

3. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность действительных чисел, обладающая тем свойством, что существует (конечный) предел $\lim_{n\to\infty} a_n\big/\frac{1}{n}$. Выясните, всегда ли в этой ситуации существует C^1-функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, обладающая тем свойством, что $f(1/n) = a_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

В следующих трех задачах участвует пространство $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. По определению, это множество C^∞-отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ со следующей топологией: базу открытых множеств составляют всевозможные подмножества вида

$$W(K, r, f, \varepsilon) = \{g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \mid \sup_{\substack{|\alpha| \leqslant r \\ x \in K}} \|D^\alpha g(x) - D^\alpha f(x)\| < \varepsilon\},$$

где $K \subset \mathbb{R}^n$ компактно, $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ и $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (α может быть и «пустым» мультииндексом веса 0). Общее указание к задачам 4–6: пользуйтесь теоремой Сарда.

4. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. а) Докажите, что в любой окрестности отображения f найдется отображение g, для которого ранг g' не меньше единицы всюду на $\mathbb{R}^2$. (Указание: поищите его среди отображений вида $f + A$, где $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ линейно.) б*) Верно ли, что в любой окрестности данного f найдется g, у которого g' всюду невырождено?

5. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Докажите, что в любой окрестности отображения f найдется отображение g, обладающее тем свойством, что если $g(x) = 0$, то $g'(x) \neq 0$.

6. Критическая точка p гладкой (класса C^2) функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется невырожденной, если $\det \|\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j(p)\| \neq 0$ (матрица, об определителе которой идет речь, называется гессианом этой критической точки). Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Докажите, что в любой окрестности отображения f найдется отображение g, все критические точки которого невырождены.

7. Докажите, что для всякого $k > 0$ существует функция класса C^k из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ с несчетным множеством критических значений.