13. Стабильность.

На прошлой лекции мы изучили дискретные инварианты расслоений. Следующий шаг в классификации — описание всех расслоений с данными дискретными инвариантами. Как мы впоследствии увидим, расслоения иногда вырождаются в не локально свободные пучки, поэтому естественно сразу рассматривать множество всех когерентных пучков с данными дискретными инвариантами. Наиболее удобный набор дискретных инвариантов дает функция Гильберта.

Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $\mathbb{P}^n$. Положим $P_{\mathcal{F}}(m) = \chi(F(m))$.

Лемма 13.1. *Функция $P_{\mathcal{F}}(m)$ — многочлен степени $\le n$ с рациональными коэффициентами, причем $P_{\mathcal{F}}(m) = r\frac{m^n}{n!} + (r\frac{n+1}{2} + \mathrm{c}_1)\frac{m^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$.*

Доказательство: Вначале проверим формулу для локально свободного $\mathcal{F}$. На прошлой лекции мы показали, что $P_{\mathcal{F}}(m) = \sum_{i=1}^r \binom{m+n+x_i}{n}$, где x_i — корни Чженя. Выделяя старшие члены и пользуясь тем, что $\sum x_i = \mathrm{c}_1$, получаем формулу. Далее, замечаем, что $P_{\mathcal{F}}(m)$ аддитивно в точных последовательностях, так же как и r и c_1, значит формула верна для всех пучков. $\square$

Многочлен $P_{\mathcal{F}}(m)$ называется *многочленом Гильберта* пучка $\mathcal{F}$. На самом деле, утверждение аналогичное лемме 13.1 выполняется для произвольного проективного многообразия X. Действительно, согласно теореме Римана–Роха, имеем $P_{\mathcal{F}}(m) = \chi(\mathcal{F}(m)) = \deg(\mathrm{ch}(\mathcal{F}(m)) \cdot \mathrm{td}(T_X))$. С другой стороны, характер Черна мультипликативен, поэтому $\mathrm{ch}(\mathcal{F}(m)) = \mathrm{ch}(\mathcal{F}) \cdot \mathrm{ch}(\mathcal{O}(m)) = \mathrm{ch}(\mathcal{F})(1 + mh + \frac{m^2}{2}h^2 + \dots + \frac{m^n}{n!}h^n)$. Записывая класс Тодда в виде $\mathrm{td}(T_X) = 1 + t_1 + t_2 + \dots + t_n$, $t_i \in H^{2i}(X, \mathbb{Q})$, получаем

$$P_{\mathcal{F}}(m) = r\frac{m^n h^n}{n!} + (rt_1 + \mathrm{ch}_1)\frac{m^{n-1}h^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + (rt_k + \mathrm{ch}_1 t_{k-1} + \dots + \mathrm{ch}_k)\frac{m^{n-k}h^{n-k}}{(n-k)!} + \dots$$

Заметим, что по многочлену Гильберта однозначно восстанавливаются коэффициенты характера Чженя (точнее говоря, произведения $\mathrm{ch}_k \cdot h^{n-k}$), а значит и классы Чженя. Поэтому многочлен Гильберта можно считать тем самым дискретным инвариантом, который мы фиксируем.

Итак, рассмотрим множество M_P всех расслоений (когерентных пучков), многочлен Гильберта которых равен P. Оказывается, на этом множестве *почти* можно ввести структуру алгебраического многообразия! Что значит "почти" разберемся позже, а вначале обсудим, как на абстрактном множестве можно ввести структуру алгебраического многообразия.

Пусть X — алгебраическое многообразие. Сопоставим ему контравариантный функтор $P_X : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$ из категории *схем* (то есть топологических пространств с пучком колец, которые локально изоморфны аффинным многообразиям) в категорию множеств, следующим образом

$$P_X(S) = \mathsf{Map}(S, X) \qquad \text{(множество всех алгебраических отображений)}$$

Заметим, что это действительно функтор: всякому алгебраическому отображению $f : T \to S$ сопоставляется отображение $f^* : P_X(S) \to P_X(T)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$.

Лемма 13.2. *Если функторы P_X и P_Y изоморфны, то $X \cong Y$.*

Доказательство: Пусть $F : P_X \to P_Y$ и $G : P_Y \to P_X$ — взаимно-обратные изоморфизмы. Рассмотрим множество $P_X(X)$. В нем есть выделенный элемент id_X. Рассмотрим элемент $f := F(\mathrm{id}_X) \in P_Y(X) = \mathsf{Map}(X, Y)$. Аналогично, пусть $g := G(\mathrm{id}_Y) \in P_X(Y) = \mathsf{Map}(Y, X)$. Заметим, что $g \circ f = f^*(g) = f^*(G(\mathrm{id}_Y)) = G(f^*(\mathrm{id}_Y)) = G(\mathrm{id}_Y \circ f) = G(f) = G(F(\mathrm{id}_X)) = \mathrm{id}_X$ (в третьем равенстве мы воспользовались функториальностью G). Аналогично $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. $\square$

Функтор P_X называется *функтором точек* многообразия X, а его значение на схеме S — множеством S*-точек* многообразия X. Например, если $\mathsf{p} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ — точка, то множество p-точек многообразия X — это множество его точек в обычном смысле. Таким образом, чтобы задать на множестве X структуру алгебраического многообразия, надо задать множество его S-точек для всех S (а не только для $S = \mathsf{p}$), причем так, чтобы зависимость от S была функториальна.

Естественно задать вопрос, всякий ли функтор $F : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$ является функтором точек какого-то многообразия.

Определение. Функтор $F : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$ называется *представимым*, если он изоморфен функтору P_X для какого-то многообразия X. В этом случае, также говорят, что многообразие X *представляет* функтор F.

Пример 13.3. Пусть V — векторное пространство. Рассмотрим такой функтор $\mathbf{P}(V) : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$, который схеме S сопоставляет множество всех линейных подрасслоений $\mathcal{L} \subset V \otimes \mathcal{O}_S$, а морфизму $f : T \to S$ — отображение $f^* : (\mathcal{L} \subset V \otimes \mathcal{O}_S) \mapsto (f^*\mathcal{L} \subset V \otimes \mathcal{O}_T)$. Легко видеть, что он изоморфен функтору точек проективного пространства $\mathbb{P}(V)$.

Упражнение 13.4. Покажите, что функтор $\mathbf{Gr}(r, V)$, которой схеме S сопоставляет множество всех подрасслоений $\mathcal{E} \subset V \otimes \mathcal{O}_S$ ранга r, представляется многообразием $\mathrm{Gr}(r, V)$.

Конечно, не всякий функтор представим — в этом мы скоро убедимся. А пока подумаем, как "продолжить" множество M всех расслоений на многообразии X с данным многочленом Гильберта до функтора.

Пусть S — произвольная схема. Если $\varphi : S \to M$ — отображение, то всякой точке $s \in S$ можно сопоставить расслоение $E_{\varphi(s)}$ на X, соответсвующее точке $\varphi(s) \in M$. Иначе говоря, отображению $S \to M$ соответствует семейство расслоений на X, параметризованное точками S. Следовательно, чтобы задать функтор, нам надо задать класс семейств расслоений, которые мы хотим считать соответствующими алгебраическим отображениям $S \to M$.

Попытка 1. Определим функтор $\mathbf{M}_P$ так: $\mathbf{M}_P(S)$ — это множество классов изоморфизма расслоений E на $S \times X$, таких что для всякой точки $s \in S$ имеем $P_{E_s} = P$, а если $f : T \to S$, то $E \in \mathbf{M}_P(S) \mapsto (f \times \mathrm{id}_X)^* E \in \mathbf{M}_P(T)$.

Сразу видно, что это определение не очень удачное. Например, если X — точка, и нас интересуют расслоения ранга 1 на X (то есть $P(m) \equiv 1$), то $\mathbf{M}_1(S)$ — множество линейных расслоений на S, что не соответствует ожиданиям.

Попытка 2. Определим $\mathbf{M}_P(S)$ как множество классов эквивалентности расслоений E на $S \times X$, таких что для всякой точки $s \in S$ имеем $P_{E_s} = P$, относительно эквивалентности $E \sim E \otimes p_S^* \mathcal{L}$ для всех линейных расслоений $\mathcal{L}$ на S.

У этого определения тоже свои сюрпризы. Посмотрим, например, к чему оно приводит для $X = \mathbb{P}^1$. Рассмотрим вначале случай $r = 1$, $\mathrm{c}_1 = d$, то есть $P(m) = m + d + 1$. В этом случае $\mathbf{M}_{m+d+1}(S)$ — это все линейные расслоения на $S \times \mathbb{P}^1$, послойной степени d с точностью до подкрутки на расслоение на S. Таким образом, $\mathbf{M}_{m+d+1}(S) = \{\mathsf{p}\}$ — представляется точкой.

Пусть теперь $r = 2$, а $\mathrm{c}_1 = 0$ (то есть $P(m) = 2m + 2$). Ясно, что расслоение ранга 2 и степени 0 на $\mathbb{P}^1$ — это $\mathcal{O}(k) \oplus \mathcal{O}(-k)$, поэтому естественно было бы предположить, чтобы функтор $\mathbf{M}_{2m+2}$ представлялся бы множеством $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Однако, это не так.

Рассмотрим $S = \mathbb{P}^1$ и расслоение E на $S \times X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, определяемое как $E = \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{S\times X} \oplus \mathcal{O}_{S\times X} \to i_* \mathcal{O}_X(1))$, где $i : X = \{s_0\} \times X \to S \times X$.

Упражнение 13.5. Покажите, что **(1)** E — расслоение; **(2)** если $s \neq s_0$, то $E_s = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X$, а $E_{s_0} = \mathcal{O}_X(1) \oplus \mathcal{O}_X(-1)$.

Из упражнения следует, что функтор $\mathbf{M}_{2m+2}$ непредставим. Действительно, если бы он был представим многообразием M, то расслоению E соответствовало бы отображение $\mathbb{P}^1 \to M$, которое переводило бы $\mathbb{P}^1 \setminus \{s_0\}$ в точку m_0, соответствующую расслоению $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$, а точку s_0 — в точку $m_1 \neq m_0$. Эта ситуация совершенно типичная.

Упражнение 13.6. Пусть X — многообразие, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ — расслоения на X, а $0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}_2 \to 0$ — расширение. Рассмотрим $E = \mathrm{Ker}(p_X^* \mathcal{E} \to i_{s_0 *} \mathcal{E}_2)$ на $\mathbb{P}^1 \times X$, где $p_X : \mathbb{P}^1 \times X \to X$ — проекция, а $i_{s_0} : X = \{s_0\} \times X \to X$ — вложение. Покажите, что **(1)** E — расслоение; **(2)** если $s \neq s_0$, то $E_s = \mathcal{E}$, а $E_{s_0} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$.

На самом деле все это означает, что функтор $\mathbf{M}_P$ представляется *стеком*. Однако, стеки не входят в нашу программу, поэтому постараемся поправить наш функтор, чтобы он был представим многообразием. Наиболее естественный способ исправления функтора — запретить расслоения вида $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$. На самом деле, чтобы все стало хорошо, приходится запретить более широкий класс расслоений (их называют “нестабильными”). При этом есть несколько различных подходов к определению стабильности. Они приводят к различным функторам и, соответственно, к различным многообразиям модулей.

Наиболее простым является подход Мамфорда–Такемото. Будем сразу работать с произвольными когерентными пучками, а не только с расслоениями.

Определение. Пусть F — когрентный пучок на $X = \mathbb{P}^n$. *Наклоном* F называется рациональное число $\mu(F) = \mathrm{c}_1(F)/r(F)$.

Определение. Пучок E на $X = \mathbb{P}^n$ называется *стабильным по Мамфорду* или *μ-стабильным* (соотв. *полустабильным по Мамфорду*, *μ-полустабильным*), если для всякого подпучка $0 \neq F \subset E$ с $r(F) < r(E)$ выполняется неравенство $\mu(F) < \mu(E)$ (соотв. $\mu(F) \leq \mu(E)$).

Теперь нам надо сформулировать понятие семейства стабильных когерентных пучков. Как и в случае с расслоениями семейством пучков на X, параметризованным многообразием S, естественно считать просто когерентный пучок $\mathcal{F}$ на $S \times X$. При этом точке s сопоставляется пучок $\mathcal{F}_s := i_s^* \mathcal{F}$ на X, где $i_s : X \to \{s\} \times X \subset S \times X$. Заметим, однако, что если $\mathcal{F}$ не является расслоением, то у функтора i_s^* вполне могут быть производные функторы. Кроме того, нет гарантии, что многочлен Гильберта пучков $\mathcal{F}_s$ не зависят от s. Так вот, оказывается, есть замечательное условие, гарантирующие как отсутствие производных функторов, так и постоянность многочлена Гильберта.

Определение. Пусть $f : \mathcal{X} \to S$ — произвольный морфизм. Пучок $\mathcal{F}$ на $\mathcal{X}$ называется *плоским над* S, если $\forall x \in \mathcal{X}$ существуют окрестности $x \in U \subset \mathcal{X}$ и $f(x) \in U' \subset f(U) \subset S$, такие что $\mathcal{F}(U)$ является плоским $\mathcal{O}_S(U')$-модулем. Морфизм $f : \mathcal{X} \to S$ называется плоским, если $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ — плоский пучок над S.

С плоскими пучками и морфизмами мы уже сталкивались, когда изучали теорему полунепрерывности.

Лемма 13.7. *Пусть $\mathcal{F}$ — пучок на $S \times X$ плоский над S. Тогда для всех $s \in S$ имеем $L_k i_s^* \mathcal{F} = 0$ при $k > 0$.*

Доказательство: По формуле проекции $i_{s*} L_k i_s^* \mathcal{F} = \mathrm{Tor}_k(\mathcal{F}, i_{s*}\mathcal{O}_X)$, но по теореме о плоской замене базы $i_{s*}\mathcal{O}_X = f^*\mathcal{O}_s$, где $f : S \times X \to S$ — проекция. Поэтому, в силу плоскости $\mathcal{F}$ имеем $\mathrm{Tor}_{>0} = 0$ и остается заметить, что так как i_s — замкнутое вложение, то $i_{s*}(F) = 0$ влечет $F = 0$. $\square$

Лемма 13.8. *Пусть $\mathcal{F}$ — пучок на $S \times X$ плоский над S. Тогда функция $s \mapsto P_{\mathcal{F}_s}(m)$ локально постоянна.*

Доказательство: Вопрос локален по S, поэтому можно считать S аффинным. Заметим, что $H^k(X, \mathcal{F}_s(m)) = H^k(X, i_s^*\mathcal{F}(m)) = H^k(S \times X, i_{s*}i_s^*\mathcal{F}(m)) = H^k(S \times X, \mathcal{F}(m) \otimes i_{s*}\mathcal{O}_X) = H^k(S \times X, \mathcal{F}(m) \otimes f^*\mathcal{O}_s) = \Gamma(S, R^k f_* \mathcal{F}(m) \otimes \mathcal{O}_s)$. Выберем у X аффинное покрытие $\{U_\bullet\}$ и рассмотрим комплекс Чеха $\mathcal{C}^\bullet := \mathcal{C}^\bullet_{\mathcal{F}(m)}$. Ясно, что $R^k f_* \mathcal{F}(m)$ равно k-ой когомологии комплекса $\mathcal{C}^\bullet$. Заметим также, что $\mathcal{C}^\bullet$ — комплекс плоских модулей, поэтому $R^k f_* \mathcal{F}(m) \otimes \mathcal{O}_s$ равно k-ой когомологии комплекса $\mathcal{C}^\bullet \otimes \mathcal{O}_s$. Предположим теперь, что $\mathcal{C}^\bullet$ — ограниченный комплекс локально свободных пучков конечного ранга. Тогда $P_{\mathcal{F}_s}(m) = \sum(-1)^k \dim H^k(X, \mathcal{F}_s(m)) = \sum(-1)^k \dim H^k(\mathcal{C}^\bullet \otimes \mathcal{O}_s) = \sum(-1)^k \dim \mathcal{C}^k \otimes \mathcal{O}_s = \sum(-1)^k r(\mathcal{C}^k)$, что очевидно не зависит от s. В общем же случае, пользуясь тем, что $\mathcal{C}^\bullet$ — комплекс плоских модулей, когомологии которого конечно порождены, можно построить ограниченный комплекс свободных модулей конечного ранга $Q^\bullet$ и морфизм комплексов $Q^\bullet \to \mathcal{C}^\bullet$, который индуцирует изоморфизм на когомологиях комплексов $Q^\bullet \otimes \mathcal{O}_s$ и $\mathcal{C}^\bullet \otimes \mathcal{O}_s$. $\square$

Попытка 3. Определим $\mathbf{M}_P^{Ms}(S)$ и $\mathbf{M}_P^{Mss}(S)$ как множества классов эквивалентности когерентных пучков E на $S \times X$ плоских над S, таких что для всякой точки $s \in S$ пучок E_s стабилен (соотв. полустабилен) по Мамфорду и $P_{E_s} = P$, относительно эквивалентности $E \sim E \otimes p_S^*\mathcal{L}$ для всех линейных расслоений $\mathcal{L}$ на S.

Пример 13.9. На $\mathbb{P}^1$ стабильными являются только линейные расслоения, а полустабильными — расслоения вида $\mathcal{O}(k)^{\oplus r}$.

Другой подход, предложенный Гизекером, часто удобнее. Отождествим кольцо $H^\bullet(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[h]/h^{n+1}$ с кольцом многочленов степени $\le n$.

Определение. Пусть F — когрентный пучок на $X = \mathbb{P}^n$. *Наклоном по Гизекеру* пучка F называется многочлен $p_F(m) = P_F(m)/r(F) \in \mathbb{Q}[m]$.

Рассмотрим на многочленах следующий порядок: положим $p_1 < p_2$, если $p_1(m) < p_2(m)$ при $m \gg 0$.

Определение. Пучок E на $X = \mathbb{P}^n$ называется *полустабильным по Гизекеру* (соотв. *полустабильным по Гизекеру*), если для всякого подпучка $0 \neq F \subset E$ с $r(F) < r(E)$ выполняется неравенство $p_F < p_E$ (соотв. $p_F \leq p_E$).

Упражнение 13.10. **(1)** E стабилен по Мамфорду $\Longrightarrow$ E стабилен по Гизекеру. **(2)** E полустабилен по Гизекеру $\Longrightarrow$ E полустабилен по Мамфорду.

Попытка 4. Определим $\mathbf{M}_P^{Gs}(S)$ и $\mathbf{M}_P^{Gss}(S)$ как множества классов эквиалентности расслоений E на $S \times X$, таких что для всякой точки $s \in S$ расслоение $E_s := E_{\{s\}\times X}$ стабильно (соотв. полустабильно) по Гизекеру и $P_{E_s} = P$, по модулю эквивалентности $E \sim E \otimes p_S^*\mathcal{L}$ для всех линейных расслоений $\mathcal{L}$ на S.

Теорема 13.11 (Симпсон). *Функтор* $\mathbf{M}_P^{Gs}$ *представим квазипроективным многообразием* $\mathcal{M}_P^{Gs}$.

Многообразие $\mathcal{M}_P^{Gs}$, представляющее функтор $\mathbf{M}_P^{Gs}$, называется многообразием модулей стабильных по Гизекеру пучков с многочленом Гильберта P.
Идея доказательства: Во-первых, доказывается, что множество классов изоморфизма всех стабильных по Гизекеру пучков с данным многочленом Гильберта ограничено, т.е. существует такое многообразие M' и пучок $\mathcal{F}$ на $M' \times X$, плоский над M', так что для любого стабильного по Гизекеру пучка F с данным многочленом Гильберта найдется точка $s \in M'$, такая что $\mathcal{F}_s \cong F$. Далее выбирается $m \gg 0$, такое что для всех s выполняется $H^{>0}(X, \mathcal{F}_s(m)) = 0$ и пучок $\mathcal{F}_s(m)$ порождается глобальными сечениями. Здесь используется квазикомпактность M'. Заметим, что $k := \dim H^0(X, \mathcal{F}_s(m)) = P_{\mathcal{F}_s}(m)$ не зависит от s. По построению всякий стабильный по Гизекеру пучок с многочленом Гильберта P является факторпучком пучка $\mathcal{O}_X(-m)^{\oplus k}$.

Пусть $\mathcal{E}$ — когерентный пучок на X. Рассмотрим функтор $\mathbf{Quot}_{\mathcal{E},P}$, определямый так: $\mathbf{Quot}_{\mathcal{E},P}(S)$ — множество классов изоморфизма плоских над S факторпучков $\mathcal{F}$ пучка $p_X^*\mathcal{E}$ на $S \times X$, таких что $P_{\mathcal{F}_s} = P$ для всех $s \in S$.

Теорема 13.12 (Гротендик). *Функтор* $\mathbf{Quot}_{\mathcal{E},P}$ *представим.*

Пусть $\mathrm{Quot}_{\mathcal{E},P}$ — многообразие, представляющая функтор $\mathbf{Quot}_{\mathcal{E},P}$. Рассмотрим многообразие $Q = \mathrm{Quot}_{\mathcal{O}_X(-m)^{\oplus k},P}$. На Q действует группа GL_k автоморфизмов пучка $\mathcal{O}_X(-m)^{\oplus k}$. Оказывается, точка $s \in Q$ (полу)стабильна в смысле геометрической теории инвариантов тогда и только тогда, когда соответствующий факторпучок $\mathcal{F}_s$ (полу)стабилен по Гизекеру! Отсюда видно, что фактор множества стабильных точек Q^s/GL_k представляет $\mathbf{M}^{Gs}(P)$. $\square$

Определение. Рассмотрим функтор $F : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$. Многообразие M *копредставляет* функтор F, если существует морфизм функторов $F \to P_M$, такой что любой морфизм функторов $F \to P_X$ пропускается через P_M.

Теорема 13.13 (Симпсон). *Функтор* $\mathbf{M}_P^{Gss}$ *копредставляется проективным многообразием* $\mathcal{M}_P^{Gss} = Q^{ss}/\mathrm{GL}_k$.

Если функтор модулей представим, то многообразие модулей называется *тонким*, а если только копредставим, то *грубым*. Если $\mathcal{M}$ — тонкое многообразие модулей, то на $\mathcal{M} \times X$ существует *универсальное семейство* — пучок $\mathcal{E}$, соответсвующий элементу $\mathrm{id}_{\mathcal{M}} \in P_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}) = \mathbf{M}(\mathcal{M})$. Он обладает тем свойством, что для всякого многообразия S и пучка $\mathcal{F} \in \mathbf{M}(S)$ на $S \times X$ существует отображение $f : S \to \mathcal{M}$, такое что $\mathcal{F} \cong f^*\mathcal{E} \otimes p_S^*\mathcal{L}$.