15. Примеры стабильных расслоений.

15.1. **Двойственность Серра.** Начнем с этой очень важной, хотя и не имеющей прямого отношения к стабильности, темы. Пусть F — когерентный пучок на $\mathbb{P}^n$. Обозначим $\omega = \mathcal{O}(-n-1)$.

Лемма 15.1. *Спаривание* $\mathrm{Hom}(F,\omega) \times H^n(F) \to H^n(\omega) = \mathbb{C}$ *невырождено.*

Доказательство: пусть $\phi \in \mathrm{Hom}(F,\omega)$. Тогда ϕ индуцирует отображение $H^n(F) \to H^n(\omega) = \mathbb{C}$, как раз дающее спаривание с ϕ. Иначе говоря, получаем морфизм $\mathrm{Hom}(F,\omega) \to H^n(F)^*$. Покажем, что он является изоморфизмом. Во-первых, если $F = \mathcal{O}(k)$, то это легко следует из формулы Ботта. Так как обе части аддитивны по F, отсюда следует утверждения для пучков F, являющихся прямыми суммами линейных. Наконец, произвольный пучок F можно дописать до точной последовательности $\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0 \to F \to 0$, где $\mathcal{E}_i$ — прямые суммы линейных. Отсюда получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(F,\omega) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_0,\omega) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1,\omega) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & H^n(F)^* \arrow[r] & H^n(\mathcal{E}_0)^* \arrow[r] & H^n(\mathcal{E}_1)^* \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Правая и средняя вертикальные стрелки — изоморфизмы, поэтому и левая стрелка — изоморфизм по лемме о пяти гомоморфизмах. □

Следствие 15.2. $\mathrm{Ext}^i(F,\omega) \cong H^{n-i}(F)^*$ *для всех* i.

Доказательство: $\mathrm{Ext}^i(F,\omega)$ — по определению производный функтор от $\mathrm{Hom}(F,\omega)$, а $H^{n-i}(F)^*$ — производный функтор от $H^n(F)^*$. □

Теорема 15.3 (Серр). $\mathrm{Ext}^i(F, G\otimes\omega) \cong \mathrm{Ext}^{n-i}(G,F)^*$ *для всех* F, G *и* i.

Доказательство: Если G — расслоение, то $\mathrm{Ext}^i(F,G\otimes\omega) \cong \mathrm{Ext}^i(F\otimes G^*,\omega)$, а $\mathrm{Ext}^{n-i}(G,F) \cong \mathrm{Ext}^{n-i}(\mathcal{O}, G^*\otimes F) \cong H^{n-i}(\mathbb{P}^n, F\otimes G^*)$, так что остается применить предыдущее следствие. Пусть теперь $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ — точная последовательность. Покажем, что если для двух ее членов выполняется утверждение теоремы, то оно выполняется и для третьего члена. Действительно, это следует из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Ext}^i(F,G'\otimes\omega) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^i(F,G\otimes\omega) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^i(F,G''\otimes\omega) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{n-i}(G',F)^* \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{n-i}(G,F)^* \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{n-i}(G'',F)^* \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

и леммы о пяти гомоморфизмах. Остается для произвольного G выбрать локально свободную резольвенту и разрезать ее на точные тройки. □

Напоследок, сформулируем теорему двойственности Серра в общем виде. Пусть X — гладкое проективное многообразие, $\dim X = n$, а $\omega_X = \Lambda^n\Omega_X$. Тогда существует естественный изоморфизм $\mathrm{Ext}^i(F, G\otimes\omega_X) \cong \mathrm{Ext}^{n-i}(G,F)^*$.

15.2. **Стабильность.** Напомним определения стабильности по Мамфорду и по Гизекеру. В их основе лежат понятия наклона пучка $\mu(F) = c_1(F)/r(F)$ и приведенного многочлена Гильберта $p_F(m) = P_F(m)/r(F)$. Пучок E называется стабильным по Мамфорду (по Гизекеру), если для любого подпучка $0 \neq F \subset E$ с $r(F) < r(E)$ выполняется неравенство $\mu(F) < \mu(E)$ (соотв.

$p_F < p_E$). Определение полустабильности получается заменой строгих неравенств на нестрогие.

Нестабильными (*unstable*), называются пучки, не являющиеся полустабильными, а не *стабильными* (*nonstable*), называются пучки, не являющиеся стабильными. Следите за пробелами!

Лемма 15.4. *Полустабильный пучок не имеет кручения.*

Доказательство: Пусть $T_E \neq 0$. Так как $r(T_E) = 0$, то $\mu(T_E) = \infty > \mu(E)$, что противоречит полустабильности пучка E. □

Пусть M_P^{Ms}, M_P^{Mss}, M_P^{Gs} и M_P^{Gss} — множества стабильных (полусатбильных) по Мамфорду (Гизекеру) пучков с многочленом Гильберта P.

Лемма 15.5. *Имеем включения $M_P^{Ms} \subset M_P^{Gs} \subset M_P^{Gss} \subset M_P^{Mss}$. Если $c_1(E)$ и $r(E)$ взаимно просты, то все эти включения — равенства.*

Доказательство: Заметим, что $p_F(m) - p_E(m) = (\mu(F) - \mu(E))\frac{m^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$, поэтому $\mu(F) > \mu(E)$ влечет $p_F > p_E$, а $p_F \geq p_E$ влечет $\mu(F) \geq \mu(E)$. Отсюда получаем первое и третье включение. Второе включение очевидно. Пусть теперь $c_1(E)$ и $r(E)$ взаимно просты и E полустабилен. Если E не стабилен, то существует $F \subset E$, такой что $p_F = p_E$. Значит $\mu(F) = \mu(E)$, то есть $c_1(F)/r(F) = c_1(E)/r(E)$, что невозможно при $0 < r(F) < r(E)$. Значит E стабилен, то есть $M_P^{Gss} \subset M_P^{Gs}$. □

Лемма 15.6. *Пусть $0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$ — точная последовательность. Тогда $\min\{\mu(E_1), \mu(E_2)\} \leq \mu(E) \leq \max\{\mu(E_1), \mu(E_2)\}$, и равенство возможно только если $\mu(E_1) = \mu(E_2)$. То же выполняется, если μ заменить на p.*

Доказательство: $c_1(E) = c_1(E_1) + c_1(E_2)$, $r(E) = r(E_1) + r(E_2)$, поэтому $\mu(E)$ — средне-взвешенное от $\mu(E_1)$ и $\mu(E_2)$ с весами $r(E_1)$ и $r(E_2)$ соответственно. Аналогично для p. □

Следствие 15.7. *Прямая сумма пучков E_1 и E_2 никогда не стабильна, а полустабильна тогда и только тогда, когда $\mu(E_1) = \mu(E_2)$ (соотв. $p(E_1) = p(E_2)$) и пучки E_i полустабильны.*

Доказательство: Проверим ($\Longleftarrow$), так как остальное очевидно. Пусть $F \subset E$ — подпучок. Положим $F_1 = \mathrm{Ker}(F \to E \to E_2)$, $F_2 = \mathrm{Im}(F \to E \to E_2)$. Тогда $0 \to F_1 \to F \to F_2 \to 0$ и $F_1 \subset E_1$, $F_2 \subset E_2$, так что $\mu(F_i) \leq \mu(E_i) = \mu(E)$, поэтому $\mu(F) \leq \mu(E)$. □

Упражнение 15.8. Докажите, что расширение полустабильных пучков одинакового наклона полустабильно.

Определение. Пучок E — *нормализован*, если $-r(E) < c_1(E) \leq 0$.

Ясно, что любой пучок становится нормализованным после подходящей (и однозначно определенной) подкрутки. У нормализованного пучка наклон находится в полуинтервале $(-1, 0]$.

Лемма 15.9. *Пучок E (полу)стабилен $\Longleftrightarrow$ пучок $E(k)$ (полу)стабилен.*

Доказательство: Заметим, что $\mu(F(k)) = \mu(F) + k$, $p_{F(k)}(m) = p_F(m + k)$, поэтому подпучок F дестабилизирует $E \Longleftrightarrow F(k)$ дестабилизирует $E(k)$. □

Лемма 15.10. *При проверке (полу)стабильности пучка без кручения E достаточно рассматривать только такие подпучки $F \subset E$, что E/F не имеет кручения.*

Доказательство: Пусть $F \subset E$ — подпучок, такой что $p_F \geq p_E$. Обозначим $Q = E/F$. Пусть $F' = \mathrm{Ker}(E \to Q \to F_Q)$. Тогда E/F' не имеет кручения, так что надо проверить, что $p_{F'} \geq p_F$. По построению имеем точную последовательность $0 \to F \to F' \to T_Q \to 0$. Значит $r(F) = r(F')$, так что достаточно проверить, что $P_{F'} \geq P_F$. Но $P_{F'} - P_F = P_{T_Q} \geq 0$. □

Лемма 15.11. *Пусть E — нормализованное расслоение ранга 2.*
(i) E — стабильно $\iff H^0(E) = 0$.
(ii) Если $c_1(E) = 0$, то E полусатбильно $\iff H^0(E(-1)) = 0$.

Доказательство: (i) $(\Longleftarrow)$ Пусть $F \subset E$ — дестабилизирующий подпучок. Согласно лемме 15.10 можно считать, что E/F не имеет кручения. Так как пучки без кручении — пучки первых сизигий, то F — пучок вторых сизигий, то есть F рефлексивен. Но $0 < r(F) < 2$, значит $r(F) = 1$, значит F локально свободен, то есть $F = \mathcal{O}(k)$. Так как $\mu(E) \in (-1; 0]$, то $k \geq 0$. Вложение $F \subset E$ дает элемент в $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(k), E) = H^0(E(-k))$, но при $k \geq 0$ $H^0(E(-k)) \subset H^0(E)$.

(i) $(\Longrightarrow)$ Если $H^0(E) \neq 0$, то существует морфизм $\mathcal{O} \to E$. Так как E не имеет кручения, его ранг равен 1, то есть ядро имеет ранг 0. Так как $\mathcal{O}$ не имеет кручения, ядро равно нулю, значит этот морфизм — вложение и так как $\mu(\mathcal{O}) = 0 \geq \mu(E)$, то $\mathcal{O} \subset E$ — дестабилизирующий подпучок.

(ii) доказывается аналогично. □

Следствие 15.12 (Шварценбергер). *Если E — стабильное расслоение на $\mathbb{P}^2$ ранга 2, то $\Delta_E := \mathrm{c}_1^2 - 4\,\mathrm{c}_2 < 0$, а если E — полустабильно, то $\Delta_E \leq 0$.*

Доказательство: так как дискриминант не меняется при подкрутке, можно считать, что E нормализовано. Тогда $H^0(E) = 0$. Более того, E^* тоже полустабильно, поэтому, пользуясь двойственностью Серра, получаем $H^2(E) \cong H^0(E^*(-3)) = 0$. Значит $\chi(E) = -\dim H^1(E) \leq 0$. Но по теоереме Римана–Роха $\chi(E) = \binom{x_1+2}{2} + \binom{x_2+2}{2} = [(x_1^2 + x_2^2) + 3(x_1 + x_2) + 4]/2 = [\mathrm{c}_1^2 + 3\,\mathrm{c}_1 - 2\,\mathrm{c}_2 + 4]/2$. Если $\mathrm{c}_1 = 0$, то $\chi(E) = 2 - \mathrm{c}_2 \leq 0$, значит $\mathrm{c}_2 \geq 2$ и $\Delta_E = -4\,\mathrm{c}_2 < 0$. Если же $\mathrm{c}_1 = -1$, то $\chi(E) = 1 - \mathrm{c}_2 \leq 0$, значит $\mathrm{c}_2 \geq 1$ и $\Delta_E = 1 - 4\,\mathrm{c}_2 < 0$. □

Изучим известные нам примеры расслоений на предмет стабильности.

Теорема 15.13. *Расслоение N нулевой корреляции на $\mathbb{P}^3$ стабильно.*

Доказательство: так как $r(N) = 2$, $\mathrm{c}_1(N) = 0$, согласно лемме 15.11 достаточно проверить, что $H^0(\mathbb{P}^3, N) = 0$. Но по определению расслоения N имеем точную последовательность $0 \to N \to T(-1) \to \mathcal{O}(1) \to 0$, а отображение $V = H^0(\mathbb{P}^3, T(-1)) \to H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(1)) = V^*$ задается невырожденной симплектической формой, поэтому $H^\bullet(\mathbb{P}^3, N) = 0$. □

Упражнение 15.14. Покажите, что **(1)** $H^i(\mathbb{P}^3, N(-1)) = \mathbb{C}$ при $i = 1$ и 0 при $i \neq 1$; **(2)** $H^i(\mathbb{P}^3, N(-2)) = \mathbb{C}$ при $i = 2$ и 0 при $i \neq 2$; **(3)** расслоение $N_{|\mathbb{P}^2}$ полустабильно, но не стабильно для любой плоскости $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^3$.

Упражнение 15.15. Пусть E — расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^n$, соответствующее локально полному пересечению коразмерности 2 $Y \subset \mathbb{P}^n$ с $\det \mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}_Y(k)$. **(1)** E стабильно $\Longleftrightarrow k > 0$ и Y не лежит в гиперповерхности степени $\le k/2$. **(2)** если k четно, то E полустабильно $\Longleftrightarrow k \ge 0$ и Y не лежит в гиперповерхности степени $\le (k/2) - 1$.

Упражнение 15.16. Пусть E — нормализованное расслоение ранга 3. Покажите, что **(1)** при $\mathrm{c}_1(E) = -1$ или -2, E стабильно $\Longleftrightarrow H^0(E) = H^0(E^*(-1)) = 0$; **(2)** при $\mathrm{c}_1(E) = 0$, E стабильно $\Longleftrightarrow H^0(E) = H^0(E^*) = 0$; **(3)** при $\mathrm{c}_1(E) = 0$, E полустабильно $\Longleftrightarrow H^0(E(-1)) = H^0(E^*(-1)) = 0$.

Проверим, напоследок, стабильность касательного расслоения к $\mathbb{P}^n$. Для удобства будем проверять стабильность расслоения $\Omega^1(1)$. Для него $\mathrm{c}_1 = -1$, $r = n$, так что $\mu = -1/n$. Пусть $F \subset \Omega^1(1)$ — дестабилизирующий подпучок, такой что факторпучок не имеет кручения. Так как $\Omega^1(1) \subset \mathcal{O}^{n+1}$, то F — подпучок в $\mathcal{O}^{n+1}$, причем легко видеть, что $Q = \mathcal{O}^{n+1}/F$ — тоже пучок без кручения (проверьте это!). Если $\mathrm{c}_1(F) < 0$, то так как $r(F) \le n-1$, то $\mu(F) \le -1/r \le -1/(n-1) < -1/n$, значит $\mathrm{c}_1(F) \ge 0$, а $\mathrm{c}_1(Q) \le 0$.

Лемма 15.17. *Пусть Q — глобально порожденный пучок без кручения на $\mathbb{P}^n$ с $\mathrm{c}_1(Q) \le 0$. Тогда $Q \cong \mathcal{O}^r$.*

Доказательство: Пусть $r = r(Q)$. Выберем точку, в которой Q локально свободен, и выберем r глобальных сечений, которые в этой точке дают базис слоя Q. Получим морфизм $\phi : \mathcal{O}^r \to Q$. В данной точке он изоморфизм, поэтому $\operatorname{Ker} \phi = 0$, т.е. получаем точную последовательность $0 \to \mathcal{O}^r \to Q \to T \to 0$, где T — пучок кручения, причем $\mathrm{c}_1(T) = \mathrm{c}_1(Q) \le 0$. Но по тоереме Римана–Роха $P_T(m) = \mathrm{c}_1(T)m^{n-1}/(n-1)! + \dots$, значит $\mathrm{c}_1(T) = 0$ и $\operatorname{codim} \operatorname{supp}(T) \ge 2$. Но по двойственности Серра $\operatorname{Ext}^1(T, \mathcal{O}) \cong H^{n-1}(\mathbb{P}^n, T(-n-1))^*$, что равно нулю, т.к. $\dim \operatorname{supp} T \le n-2$. Значит последовательность расщепляется, то есть $T \subset Q$, то есть $T = 0$, так как Q не имеет кручения, и $Q = \mathcal{O}^r$. $\square$

Итак, $\mathcal{O}^{n+1}/F \cong \mathcal{O}^r$, значит $F \cong \mathcal{O}^{n+1-r}$, но $H^0(\Omega(1)) = 0$, значит $F = 0$.

15.3. **Фильтрация Хардера-Нарасимхана.** Удобно считать пучки кручения полустабильными с бесконечным приведенным многочленом Гильберта.

Теорема 15.18 (Хардер–Нарасимхан). *Пусть E — когерентный пучок. Существует единственная фильтрация $0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_{m-1} \subset E_m = E$ т.ч. E_i/E_{i-1} — полустабильные пучки, причем последовательность наклонов $p_i = p_{E_i/E_{i+1}}$ строго убывает $p_1 > p_2 > \dots > p_m$.*

Эта фильтрация называется фильтрацией Хардера–Нарасимхана. Доказательство разобьем на несколько шагов.

Назовем подпучок $F \subset E$ максимальным, если он не содержится ни в каком подпучке $F' \subset E$ с $p_{F'} \ge p_F$. Так как категория когерентных пучков нетерова, всякий подпучок содержится в максимальном подпучке с не меньшим наклоном. Хотя, конечно, максимальных подпучков может быть несколько.

Лемма 15.19. *Пусть $F \subset E$ — максимальный подпучок. Если $G \subset E$, причем $p_G \ge p_F$ и $G \not\subset F$, то $p_{F \cap G} > p_G$.*

Доказательство: Рассмотрим подпучок $F + G = \operatorname{Im}(F \oplus G \to E) \subset E$. Так как $G \not\subset F$, то $F \subsetneq F + G$, поэтому в силу максимальности F имеем $p_{F+G} < p_F$.

Значит $p_{(F+G)/F} < p_F$. Но $(F+G)/F \cong G/(F\cap G)$, значит $p_{G/(F\cap G)} < p_F \le p_G$, следовательно $p_{F\cap G} < p_G$. □

Пусть теперь $F \subset E$ — **максимальный** подпучок **минимального** ранга.

Лемма 15.20. *Пучок F не содержит подпучков $G \subset F$ с $p_G > p_F$.*

Доказательство: Пусть $G' \subset F$ — максимальный в F, содержащий G, а $G'' \subset E$ — максимальный в E, содержащий G'. Если $G'' \subset F$, то $r(G'') < r(F)$ (если $r(G'') = r(F)$, то $p_{G''} \le p_F$ — противоречие с $p_{G''} \ge p_{G'} \ge p_G > p_F$), что противоречит минимальности $r(F)$ среди максимальных подпучков! Значит $G'' \not\subset F$. Тогда $p_{F\cap G''} > p_{G''} \ge p_{G'}$ противоречит максимальности G' в F. □

Доказательство существования: индукция по $r(E)$. Пусть $E_1 \subset E$ — **максимальный** подпучок **минимального** ранга. Тогда E_1 полустабилен. Положим $E' = E/E_1$. Тогда E' — пучок без кручения (иначе положим $E'_1 = \mathrm{Ker}(E \to E' \to E'/T_{E'})$ и получим $p_{E'_1} \ge p_{E_1}$, так что E_1 не максимален). По индукции пучок E' обладает фильтрацией Хардера–Нарасимхана $0 \subset E'_1 \subset \dots \subset E'_m = E'$. Положим $E_i = \mathrm{Ker}(E \to E' \to E'/E'_{i-1})$. Тогда $E_{i+1}/E_i \cong E'_i/E'_{i-1}$ полустабилен, так что остается проверить, что $p_{E_1} > p_{E_2/E_1}$. Но если $p_{E_1} \le p_{E_2/E_1}$, то $p_{E_1} \le p_{E_2}$, что противоречит максимальности пучка E_1. □

Осталось доказать единственность. Пусть $0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_{m-1} \subset E_m = E$ — фильтрация Хардера–Нарасимхана. Положим $p_{max}(E) = p_{E_1}$, $p_{min}(E) = p_{E_m/E_{m-1}}$.

Лемма 15.21. *Если E и F полустабильны и $p_E > p_F$, то* $\mathrm{Hom}(E, F) = 0$.

Доказательство: пусть $0 \ne f \in \mathrm{Hom}(E, F)$. Так как F полустабилен, $p_{\mathrm{Im}\, f} \le p_F < p_E$, значит $p_E < p_{\mathrm{Ker}\, f}$, что противоречит полустабильности E. □

Лемма 15.22. *Если $p_{min}(E) > p_{max}(F)$, то* $\mathrm{Hom}(E, F) = 0$.

Доказательство: Пусть $0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{l-1} \subset F_l = F$ — фильтрация Хардера–Нарасимхана. Применим индукцию по $m + l$. Если $m = l = 0$ доказывать нечего. Пусть теперь $m > 0$ и пусть $0 \ne f \in \mathrm{Hom}(E, F)$. Рассмотрим композицию $E_1 \to E \to F \to F/F_{l-1}$. Согласно лемме 15.21 она равна нулю, поэтому $f(E_1) \subset F_{l-1}$. Рассмотрим композицию $E_1 \to F_{l-1} \to F_{l-1}/F_{l-2}$. Согласно лемме 15.21 она равна нулю, поэтому $f(E_1) \subset F_{l-2}$. Продолжая так же, получаем $f(E_1) = 0$. Значит f пропускается через $f' : E/E_1 \to F$. Применяя к f' предположение индукции, получаем $f' = 0$, а значит и $f = 0$. □

Пусть $E_\bullet$ — фильтрация Хардера–Нарасимхана на пучке E, а p — приведенный многочлен Гильберта (т.е. многочлен с рациональными коэффициентами степени $n = \dim X$ и старшим коэффициентом $h^n/n!$). Обозначим $E_p = E_k$, где $k = \max\{i \mid p_{E_i/E_{i-1}} \ge p\}$; и $\mathrm{gr}_p^{HN}(E) = E_k/E_{k-1}$, если $p_{E_k/E_{k-1}} = p$.

Лемма 15.23. *Пусть $f : E \to F$ — морфизм. Тогда $p(E_p) \subset F_p$ для всех p.*

Доказательство: Рассмотрим композицию $f' : E_p \to E \to F \to F/F_p$. Ясно, что $p_{max}(E_p) \ge p > p_{min}(F/F_p)$, значит $f' = 0$, то есть $f(E_p) \subset F_p$. □

Доказательство единственности: Пусть $E'_\bullet$ — другая фильтрация Хардера–Нарасимхана. Рассмотрим тождественный морфизм $\mathrm{id} : E \to E$. Тогда $E_p = \mathrm{id}(E_p) \subset E'_p$. Аналогично $E'_p \subset E_p$. Значит $E_p = E'_p$ и фильтрации совпадают. □