16. Характер расщепления стабильных расслоений.

Пусть E — расслоение ранга r на $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$, а $\mathbb{G}_n = \mathrm{Gr}(2, V)$ — грассманиан прямых в $\mathbb{P}^n$. Напомним, что для каждой прямой $L \in \mathbb{G}_n$ определен тип расщепления $a^E(L) = (a_1^E(L), \dots, a_r^E(L)) \in \mathbb{Z}^r$ — невозрастающий набор целых чисел, такой что $E_{|L} = \mathcal{O}_L(a_1^E(L)) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_L(a_r^E(L))$. На множестве $\mathbb{Z}^r$ вводится лексикографический порядок и $\underline{a}^E := \min\{a^E(L) \mid L \in \mathbb{G}_n\}$ называется общим типом расщепления. Существует непустое открытое подмножество $U_E \subset \mathbb{G}_n$ такое что для всех $L \in U_E$ имеем $a^E(L) = \underline{a}^E$, а для $L \notin U_E$ имеем $a^E(L) > \underline{a}^E$.

Пусть $\mathbb{F}_n = \{(x, L) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{G}_n \mid x \in L\}$ — многообразие флагов. Обозначим через $p : \mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^n$ и $q : \mathbb{F}_n \to \mathbb{G}_n$ — проекции. Рассмотрим $V_E := p(q^{-1}(U_E)) \subset \mathbb{P}^n$ — множество точек $x \in \mathbb{P}^n$, через которые проходит хотя бы одна прямая с общим типом расщепления. Оно очевидно открыто в $\mathbb{P}^n$.

Теорема 16.1. *Пусть $\underline{a}^E = (a_1, \dots, a_r)$ — общий тип расщепления расслоения E ранга r на $\mathbb{P}^n$. Если $a_s - a_{s+1} \ge 2$ для какого-то $1 \le s \le r-1$, то существует подпучок $F \subset E$, такой что на V_E он является подрасслоением в E и для любой $L \in U_E$ имеем $F_{|L} \cong \mathcal{O}_L(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_L(a_s)$.*

Доказательство этой теоремы довольно длинное — разобъем его на несколько шагов. Во-первых, подкручивая при необходимости E, можно считать, что $a_1 \ge \dots \ge a_s = 0$ и $-2 \ge a_{s+1} \ge \dots \ge a_r$.

Обозначим $\widetilde{U}_E = q^{-1}(U_E) \subset \mathbb{F}_n$, а для каждой точки $L \in \mathbb{G}_n$ обозначим $\widetilde{L} = q^{-1}(L)$. Тогда $\widetilde{U}_E \subset \mathbb{F}_n$ — открытое подмножество, а $\widetilde{L}$ отождествляется проекцией p с прямой $L \subset \mathbb{P}^n$. Рассмотрим расслоение p^*E на $\mathbb{F}_n$, морфизм $\phi : q^*q_*p^*E \to p^*E$. и его образ $\tilde{F} = \mathrm{Im}\,\phi \subset E$.

Лемма 16.2. *На множестве $\widetilde{U}_E$ морфизм ϕ является морфизмом расслоений ранга s. Его образ $\tilde{F}$ при ограничении на прямую $\widetilde{L} = q^{-1}(L)$, $L \in U_E$, равен подрасслоению $\mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_s) \subset \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_r)$.*

Доказательство: $q^*q_*p^*E_{|\widetilde{U}_E} = q^*q_*(p^*E_{|\widetilde{U}_E})$. по теореме о плоской замене базы. Кроме того, $\forall L \in U_E$ размерности пространств $H^i(q^{-1}(L), p^*E_{|q^{-1}(L)})$ постоянны (они зависят только от $a^E(L) = \underline{a}^E$), поэтому по теореме о полунепрерывности $q_*(p^*E_{|\widetilde{U}_E})$ — расслоение, а его слой в точке $L \in U_E$ равен

$$H^0(\widetilde{L}, p^*E_{|\widetilde{L}}) = H^0(\widetilde{L}, \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_r)) = H^0(\widetilde{L}, \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_s)).$$

Так как расслоение $\mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_s)$ порождается глобальными сечениями, заключаем, что $\tilde{F}_{|\widetilde{L}} = \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_s) \subset p^*E_{|\widetilde{L}}$. В частности, $\tilde{F}_{|\widetilde{U}_E}$ является подрасслоением ранга s в $p^*E_{|\widetilde{U}_E}$. □

Обозначим $\tilde{Q} = p^*E/\tilde{F}$. Обозначим через $X = \mathbb{F}_n \setminus S(\tilde{Q}) \subset \mathbb{F}_n$ — открытое подмножество, на котором пучок $\tilde{Q}$ локально свободен (и стало быть $\tilde{F}$ является подрасслоением в p^*E). Ясно, что $\widetilde{U}_E \subset X$. Обозначим $Y = p(X) \subset \mathbb{P}^n$. Ясно, что Y открыто в $\mathbb{P}^n$ и $V_E \subset Y$. Заметим также, что $\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n \setminus Y) \ge 2$. Действительно, V_E, а значит и Y содержит прямую, а если $\mathrm{codim}(\mathbb{P}^n \setminus Y) \le 1$, то $\mathbb{P}^n \setminus Y$ пересекалось бы с любой прямой в $\mathbb{P}^n$.

Для каждой точки $y \in Y$ слой $X \cap p^{-1}(y)$ является непустым открытым подмножеством в $p^{-1}(y) \cong \mathbb{P}^{n-1}$, в частности $X \cap p^{-1}(y)$ связно. Поэтому естественный морфизм $T_X \to p^*T_Y$ — сюръекция (иначе говоря $p : X \to Y$

— субмерсия) со связными слоями. Наша следующая цель — показать, что существует расслоения F' на Y, такое что $\tilde{F}_{|X} \cong p^*F'$. Для этого нам понадобится следующая лемма о спуске. Обозначим $T_{X/Y} := \mathrm{Ker}(T_X \to p^*T_Y)$ — отнсительное касательное расслоение.

Лемма 16.3. *Пусть $p : X \to Y$ — субмерсия со связными слоями, E — расслоение на Y, а $\tilde{F} \subset p^*E$ — подрасслоение. Если $\mathrm{Hom}(T_{X/Y}, \mathcal{H}om(\tilde{F}, p^*E/\tilde{F})) = 0$, то существует подрасслоение $F \subset E$ на Y, такое что $\tilde{F} = p^*F$.*

Доказательство: Пусть $r(\tilde{F}) = s$. Рассмотрим относительный грассманиан $\mathrm{Gr}_Y(s, E)$. Это многообразие, склеенное из произведений $U_i \times \mathrm{Gr}(s, r)$, (здесь $\{U_i\}$ — тривиализующее покрытие для расслоения E, а $r = r(E)$) с помощью коцикла, задающего расслоение E в покрытии $\{U_i\}$, аналогично тому, как проективизация $\mathbb{P}_Y(E)$ склеивается из произведений $U_i \times \mathbb{P}^{r-1}$. По определению имеем проекцию $\pi : \mathrm{Gr}_Y(s, E) \to Y$, слой которой над точкой $y \in Y$ — это грассманиан $\mathrm{Gr}(s, E_y)$. Кроме того, расслоение π^*E на $\mathrm{Gr}_Y(s, E)$ содержит тавтологическое подрасслоение $\mathcal{S} \subset \pi^*E$ ранга s, которое склеивается из тавтологических подрасслоений на $\mathrm{Gr}(s, r)$, поднятых на $U_i \times \mathrm{Gr}(s, r)$. В случае $s = 1$ тавтологическое подрасслоение совпадает с линейным расслоением $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_Y(E)/Y}(-1)$. Если $f : Y \to \mathrm{Gr}_Y(s, E)$ — сечение проекции π (то есть $\pi \circ f = \mathrm{id}_Y$), то $f^*\mathcal{S} \subset f^*\pi^*E = E$ — подрасслоение ранга s. Обратно, если $F \subset E$ — подрасслоение ранга s, то отображение $Y \to \mathrm{Gr}_Y(s, E)$, $y \mapsto F_y \in \mathrm{Gr}(s, E_y)$ является сечением проекции π. Легко видеть, что тем самым возникает биекция между множеством всех подрасслоений $F \subset E$ ранга s и сечений $f : Y \to \mathrm{Gr}_Y(s, E)$ проекции π.

Упражнение 16.4. Покажите, что $\mathrm{Gr}_Y(s, E)$ представляет функтор, сопоставляющий схеме S множество всех пар (ξ, F), где $\xi : S \to Y$ — морфизм, а $F \subset \xi^*E$ — подрасслоение ранга s. Что будет "универсальным объектом"?

Итак, чтобы получить подрасслоение $F \subset E$, нам надо построить сечение $f : Y \to \mathrm{Gr}_Y(s, E)$ проекции $\pi : \mathrm{Gr}_Y(s, E) \to Y$. При этом нам дано подрасслоение $\tilde{F} \subset p^*E$, то есть сечение $\tilde{f} : X \to \mathrm{Gr}_X(s, p^*E)$ проекции $\tilde{\pi} : \mathrm{Gr}_X(s, p^*E) \to X$. Заметим, что условие $\tilde{F} = p^*F$ равносильно условию $\tilde{p} \circ \tilde{f} = f \circ p$, где $\tilde{p} : \mathrm{Gr}_X(s, p^*E) \to \mathrm{Gr}_Y(s, E)$ — естественная проекция

Упражнение 16.5. Покажите, что $\mathrm{Gr}_X(s, p^*E) \cong \mathrm{Gr}_Y(s, E) \times_Y X$ и $p \circ \tilde{\pi} = \pi \circ \tilde{p}$. Проверьте, что $\tilde{p}^*\mathcal{S} \subset \tilde{p}^*\pi^*E = \tilde{\pi}^*p^*E$ — тавтологическое расслоение на $\mathrm{Gr}_X(s, p^*E)$.

Таким образом, нам дан морфизм $f' = \tilde{p} \circ \tilde{f} : X \to \mathrm{Gr}_Y(s, E)$, такой что $\pi \circ f' = \pi \circ \tilde{p} \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{\pi} \circ \tilde{f} = p$, и нам надо показать, что $f' = f \circ p$ для некоторого $f : Y \to \mathrm{Gr}_Y(s, E)$ (заметим, что тогда $\pi \circ f \circ p = \pi \circ f' = p$, поэтому в силу сюръективности p автоматически получаем $\pi \circ f = \mathrm{id}_Y$).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathrm{Gr}_Y(s, E) \arrow[dl, "\pi"] \\ & Y \arrow[ur, dotted, "f"', shift left] & \end{tikzcd}$$

Ясно, что такое отображение f возникает тогда и только тогда, когда отображение f' постоянно на слоях морфизма p. А для проверки того, что f' постоянно на слоях, достаточно проверить, что дифференциал f' вдоль слоев равен нулю (так как слои связны!). Но дифференциал вдоль слоев — это отображение $d_{X/Y}f' : T_{X/Y} \to {f'}^*T_{\mathrm{Gr}_Y(s,E)/Y}$, поэтому, ввиду изоморфизма

$$ {f'}^*\,\mathcal{H}om(\mathcal{S}, \pi^*E/\mathcal{S}) \cong \mathcal{H}om({f'}^*\mathcal{S}, {f'}^*\pi^*E/{f'}^*\mathcal{S}) \cong \mathcal{H}om(\tilde{F}, p^*E/\tilde{F}) $$

(т.к. $\tilde{p}^*\mathcal{S} \subset \tilde{p}^*\pi^*E = \tilde{\pi}^*p^*E$ — тавтологическое расслоение на грассманиане $\mathrm{Gr}_X(s, p^*E)$, то ${f'}^*\mathcal{S} = \tilde{f}^*\tilde{p}^*\mathcal{S} = \tilde{F}$) остается воспользоваться леммой. $\square$

Лемма 16.6. *Относительное касательное расслоение $T_{\mathrm{Gr}_Y(s,E)/Y}$ изоморфно расслоению $\mathcal{H}om(\mathcal{S}, \pi^*E/\mathcal{S})$.*

Доказательство: На произведении $U_i \times \mathrm{Gr}(s,r)$ имеем естественный изоморфизм $T_{U_i\times\mathrm{Gr}(s,r)} \cong T_{U_i} \oplus T_{\mathrm{Gr}(s,r)}$. Кроме того, $T_{\mathrm{Gr}(s,r)} = \mathcal{H}om(\mathcal{S}, \mathcal{O}^r/\mathcal{S})$, где $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}^r$ — тавтологическое расслоение на $\mathrm{Gr}(s,r)$. Запишем точную последовательность

$$ 0 \to \mathcal{H}om(\mathcal{S}, \mathcal{O}^r/\mathcal{S}) \to T_{U_i\times\mathrm{Gr}(s,r)} \to T_{U_i} \to 0. $$

Ясно, что при склеивании $\mathrm{Gr}_Y(s,E)$ из $U_i \times \mathrm{Gr}(s,r)$, такие последовательности склеиваются в последовательность

$$ 0 \to \mathcal{H}om(\mathcal{S}, \pi^*E/\mathcal{S}) \to T_{\mathrm{Gr}_Y(s,E)} \to \pi^*T_Y \to 0, $$

которая и дает искомый изоморфизм. $\square$

Чтобы применить лемму 16.3 в нашей ситуации, надо описать $T_{\mathbb{F}_n/\mathbb{P}^n}$ и $\mathcal{H}om(\tilde{F}, p^*E/\tilde{F})$. Для описания $T_{\mathbb{F}_n/\mathbb{P}^n}$ полезно следующее утверждение.

Упражнение 16.7. $\mathbb{F}_n \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}(V)}(V\otimes\mathcal{O}/\mathcal{O}(-1))$. При этом расслоение Гротендика $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V)}(V\otimes\mathcal{O}/\mathcal{O}(-1))/\mathbb{P}(V)}(-1)$ изоморфно расслоению $q^*\mathcal{L}/p^*\mathcal{O}(-1)$. В частности $T_{\mathbb{F}_n/\mathbb{P}(V)} \cong \mathcal{H}om(q^*\mathcal{L}/p^*\mathcal{O}(-1), V\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}/q^*\mathcal{L})$.

Лемма 16.8. *Ограничение расслоения $T_{\mathbb{F}_n/\mathbb{P}^n}$ на прямую $\widetilde{L} = q^{-1}(L)$ изоморфно расслоению $V/L\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{L}}(-1)$.*

Доказательство: Ясно, что расслоение $q^*\mathcal{L}_{|\widetilde{L}}$ изоморфно расслоению $L\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{L}}$, а $p^*\mathcal{O}(-1) \cong \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(-1)$. Поэтому $q^*\mathcal{L}/p^*\mathcal{O}(-1) = L\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{L}}/\mathcal{O}_{\widetilde{L}}(-1) \cong \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(1)$, а $(V\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}/q^*\mathcal{L})_{|\widetilde{L}} = V\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{L}}/L\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{L}} \cong (V/L)\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{L}}$. Окончательно получаем $T_{\mathbb{F}_n/\mathbb{P}^n|\widetilde{L}} \cong \mathcal{H}om(\mathcal{O}_{\widetilde{L}}(1), V/L\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{L}}) \cong V/L\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{L}}(-1)$. $\square$

Лемма 16.9. *Если $L \in U_E$, то $\mathcal{H}om(\tilde{F}, p^*E/\tilde{F})_{|\widetilde{L}} \cong \oplus_{k\le s, l\ge s+1}\mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_l - a_k)$.*

Доказательство: $\tilde{F}_{|\widetilde{L}} \cong \oplus_{k\le s}\mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_k)$, а $(p^*E/\tilde{F})_{|\widetilde{L}} \cong \oplus_{l\ge s+1}\mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_k)$. $\square$

Заметим теперь, что при $l \ge s+1$, $k \le s$ имеем $a_l - a_k \le -2$, поэтому всякий морфизм $T_{X/Y} \to \mathcal{H}om(\widetilde{F}, p^*E/\tilde{F})$ равен нулю на каждой из прямых $\widetilde{L}$, а значит равен нулю на $q^{-1}(U_E)$, а значит и на X, так как $q^{-1}(U_E)$ плотно в X. Значит $\tilde{F}_{|X} \cong p^*F'$, где F' — подрасслоение в $E_{|Y}$. Остается продолжить подрасслоение $F' \subset E_{|Y}$ до подпучка на всем $\mathbb{P}^n$. Мы покажем, что в качестве продолжения можно взять пучок $F = j_*F'$, где $j : Y \to \mathbb{P}^n$ — вложение.

Лемма 16.10. *Для любого пучка G на Y имеем $j^*j_*G \cong G$.*

Доказательство: По определению, если $U \subset Y$ — открытое аффинное, то $j(U) = U$ и $(j^*j_*G)(U) = (j_*G)(j(U)) \otimes_{\mathcal{O}(j(U))} \mathcal{O}(U) = (j_*G)(j(U)) = G(U)$. $\square$

Лемма 16.11. *Имеем изоморфизмы $j_*\mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$, $j_*j^*E \cong E$.*

Доказательство: По определению, сечения пучка $j_*\mathcal{O}_Y$ над открытым множеством $U \subset \mathbb{P}^n$ — это функции на $Y \cap U$. Но $\mathrm{codim}(\mathbb{P}^n \setminus Y) \geq 2$, поэтому всякая функция на $Y \cap U$ продолжается на U. Далее, заметим, что $(j_*j^*E)(U) = j^*E(Y \cap U) = E(Y \cap U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{O}(Y \cap U) = E(Y \cap U)$, поэтому естественный морфизм $E \to j_*j^*E$ над открытым подмножеством $U \subset \mathbb{P}^n$ есть морфизм ограничения $E(U) \to E(Y \cap U)$. Так как локально сечение расслоения — это набор функций, а функции можно продолжать, то морфизм $E \to j_*j^*E$ сюръективен. Кроме того, он инъективен, так как E не имеет кручения. $\square$

Итак, $F' \subset E_{|Y} = j^*E$, значит $F := j_*F' \subset j_*j^*E \cong E$, причем имеем $j^*F = j^*j_*F' \cong F'$ поэтому F — искомый подпучок. Теорема доказана.

Укажем вначале применения этой теоремы к равномерным расслоениям.

Упражнение 16.12. (1) Если E — равномерное расслоение на $\mathbb{P}^n$ ранга r и типа $\underline{a}^E = (a_1, \ldots, a_r)$ и $a_s - a_{s+1} \geq 2$, то E — расширение равномерных расслоений типа $(a_1, \ldots, a_s)$ и $(a_{s+1}, \ldots, a_r)$. **(2)** Если E — неразложимое равномерное расслоение на $\mathbb{P}^n$ ранга n, то $a_s - a_{s+1} \leq 1$ для всех $1 \leq s \leq n-1$, где $\underline{a}^E = (a_1, \ldots, a_n)$ — тип расслоения E. **(3)*** Если E — неразложимое равномерное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^2$, то $E \cong T(a)$.

Теперь применим нашу теорему к полустабильным расслоениям.

Следствие 16.13. *Если E — полустабильное расслоение на $\mathbb{P}^n$ ранга r, с общим типом расщепления $(a_1, \ldots, a_r)$, то $a_s - a_{s+1} \leq 1$ для всех $1 \leq s \leq r-1$.*

Доказательство: пусть $a_s - a_{s+1} \geq 2$. Построим подпучок F как в теореме. В силу функториальности классов Чженя имеем $c_1(F) = c_1(F_{|L}) = a_1 + \cdots + a_s$, поэтому $\mu(F) \geq (a_1 + \cdots + a_s)/s > (a_1 + \cdots + a_r)/r = c_1(E)/r = \mu(E)$. $\square$

Следствие 16.14 (Грауэрт–Мюлих). *Если E — полустабильное нормализованное расслоение на $\mathbb{P}^n$ ранга 2, то $\underline{a}^E = (0,0)$ или $\underline{a}^E = (0,-1)$.*

При этом можно достаточно явно описать, что представляет собой множество $S_E \subset \mathbb{G}_n$ прямых подскока расслоения E.

Лемма 16.15. *Множество S_E является дивизором степени $\mathrm{c}_2(E)$ в $\mathbb{G}_n$.*

Доказательство: Рассмотрим вначале случай $n = 2$. Тогда $\mathbb{G}_2 \cong \mathbb{P}^2$, а $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{G}_2$ — дивизор степени $(1,1)$, так что имеем точную последовательноть $0 \to \mathcal{O}(-1,-1) \to \mathcal{O} \to i_*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_2} \to 0$, где $i : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{P}^2 \times \mathbb{G}_2$ — вложение. Пусть $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ — проекции $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{G}_2$ на сомножители, так что $p = \tilde{p} \circ i$, $q = \tilde{q} \circ i$. Значит $q_*p^*(E(-1)) \cong \tilde{q}_*i_*i^*\tilde{p}^*(E(-1)) \cong \tilde{q}_*(\tilde{p}^*E(-1) \otimes i_*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_2})$. Заметим, что по теореме о плоской замене базы $R^i\tilde{q}_*(\tilde{p}^*E(-1)) = H^i(E(-1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}_2}$, $R^i\tilde{q}_*(\tilde{p}^*E(-1) \otimes \mathcal{O}(-1,-1)) = H^i(E(-2)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}_2}(-1)$. Пользуясь полустабильностью E и двойственностью Серра получаем $H^0(E(-1)) = H^0(E(-2)) = 0$, $H^2(E(-1)) = H^2(E(-2)) = 0$, откуда получаем точную последовательность

$$0 \to q_*p^*(E(-1)) \to H^1(E(-2)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}_2}(-1) \to H^1(E(-1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}_2} \to R^1q_*p^*(E(-1)) \to 0.$$

Заметим, что $q_*p^*E(-1)$ равно нулю на U_E, а пучок $H^1(E(-2)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}_2}(-1)$ не имеет кручения, поэтому $q_*p^*E(-1) = 0$. Кроме того, легко видеть, что $\mathrm{supp}(R^1q_*p^*(E(-1))) = S_E$, так что остается найти $\mathrm{c}_1(R^1q_*p^*(E(-1)))$. Из точной последовательности видно, что он равен $\dim H^1(E(-2)) = -\chi(E(-2)) = -x(x-1)/2 - y(y-1)/2 = xy - (x+y)(x+y-1)/2$, где x, y — корни Чженя расслоения E. Но $x + y = \mathrm{c}_1(E) = 0$, поэтому получается $xy = \mathrm{c}_2(E)$, что и требовалось. Пусть теперь $n \geq 2$. Выберем общую $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^n$. Тогда $\mathbb{G}_2 \subset \mathbb{G}_n$ и $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_n$. Ясно, что $S_E \cap \mathbb{G}_2 = S_{E_{|\mathbb{P}^2}}$, откуда все и следует. $\square$

Упражнение 16.16. Покажите, что для общего типа расщепления полустабильного нормализованного расслоения на $\mathbb{P}^n$ данного ранга есть лишь конечное число возможностей.

Отчасти верно и обратное утверждение к теореме Грауэрта–Мюлиха.

Лемма 16.17. *Если E — расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^n$, такое что для общей прямой $L \subset \mathbb{P}^n$ имеем $E_{|L} \cong \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L$, то E полустабильно.*

Доказательство: индукция по n. Случай $n = 1$ очевиден. Пусть теперь $n \geq 2$. Пусть L — общая прямая. Выберем $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$, так что $L \subset \mathbb{P}^{n-1}$. Тогда $E_{|\mathbb{P}^{n-1}}$ полустабильно, значит $H^0(\mathbb{P}^{n-1}, E_{|\mathbb{P}^{n-1}}(-k)) = 0$ при $k \geq 1$. Из точной последовательности $0 \to E(-1) \to E \to i_*(E_{|\mathbb{P}^{n-1}}) \to 0$, где $i : \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^n$ — вложение, следует, что морфизм $H^0(\mathbb{P}^n, E(-k-1)) \to H^0(\mathbb{P}^n, E(-k))$ — изоморфизм при $k \geq 1$. Но $H^0(\mathbb{P}^n, E(-k)) = 0$ при $k \gg 0$, значит $H^0(\mathbb{P}^n, E(-1)) = 0$, следовательно E полустабильно. $\square$

Теорема 16.18 (Барт–Маруяма). *Пусть $n \geq 3$ и E — полустабильное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^n$. Для общей гиперплоскости $\mathbb{P}^{n-1}$ расслоение $E_{|\mathbb{P}^{n-1}}$ полустабильно.*

Доказательство: Можно считать, что E нормализовано. Если $c_1(E) = 0$, то все следует из предыдущей леммы и теоремы Грауэрта–Мюлиха. Пусть $c_1(E) = -1$. Пусть L — общая прямая, так что $E_{|L} = \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L(-1)$. Пользуясь рассуждениями предыдущей леммы легко показать, что для любой гиперплоскости $H \cong \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$, проходящейчерез L отображение $H^0(H, E_{|H}) \to H^0(L, E_{|L})$ — вложение. Поэтому, если для всех таких H расслоение $E_{|H}$ не полустабильно, то отображение $H^0(H, E_{|H}) \to H^0(L, E_{|L})$ — изоморфизм. Рассмотрим пространство $L^\perp \cong \mathbb{P}^{n-2}$ всех гиперплоскостей в $\mathbb{P}^n$, проходящих через L. Пусть $Q = \{(x, H) \in \mathbb{P}^n \times L^\perp \mid x \in H\} \subset \mathbb{P}^n \times L^\perp$. Обозначим через $p : Q \to \mathbb{P}(V)$ и $q : Q \to L^\perp$ проекции. Ясно, что $L \times L^\perp \subset Q$. Обозначим через $i : L \times L^\perp \to Q$ — вложение.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^n & Q \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "q"] & L \times L^\perp \arrow[l, "i"'] \\
 & L^\perp &
\end{tikzcd}
$$

Рассмотрим на Q морфизм $p^*E \to i_*i^*p^*E$ и применим к нему q_*. Согласно доказанному выше $q_*p^*E \cong q_*i_*i^*p^*E$. Но ясно, что $p \circ i$ — композиция проекции $L \times L^\perp \to L$ и вложения $L \to \mathbb{P}^n$, а $q \circ i$ — проекция $L \times L^\perp \to L^\perp$, поэтому $q_*i_*i^*p^*E \cong H^0(L, E_{|L}) \otimes \mathcal{O}_{L^\perp} \cong \mathcal{O}_{L^\perp}$. Значит $q_*p^*E \cong \mathcal{O}_{L^\perp}$. Кроме того, ясно, что естественный морфизм $\mathcal{O}_Q = q^*q_*p^*E \to E$ является вложением (на слоях Q над $L^\perp$ это морфизм $\mathcal{O}_H \to E_{|H}$). Применяя p_* получаем вложение $p_*\mathcal{O}_Q \to p_*p^*E \cong E \otimes p_*\mathcal{O}_Q$. Но $p_*\mathcal{O}_Q \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ (проверьте это!), т.е. получаем вложение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to E$, что противоречит полустабильности E. $\square$

Следствие 16.19. *Если E — полустабильное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^n$, то $\Delta_E = c_1(E)^2 - 4\,c_2(E) \leq 0$.*