17. Спектральная последовательность Бейлинсона.

Спектральная последовательность Бейлинсона позволяет выразить произвольное расслоение (когерентный пучок) на проективном пространстве через конечный набор простейших расслоений. Но прежде чем перейти к этой спектральной последовательности, скажем несколько слов о спектральных последовательностях вообще.

Пусть $K^\bullet$ — комплекс (абелевых групп) с заданной на нем регулярной убывающей фильтрацией $F_\bullet K^\bullet$: $\dots \subset F_{i+1}K^\bullet \subset F_i K^\bullet \subset F_{i-1}K^\bullet \subset \dots$. Регулярность означает, что $\cap_p F_p K^\bullet = 0$ и $\cup_p F_p K^\bullet = K^\bullet$. Обозначим через $G_F^\bullet K^\bullet$ — присоединенный градуированный комплекс, $G_F^i K^\bullet = F_i K^\bullet / F_{i+1} K^\bullet$. Следующие примеры полезно иметь в виду:

Пример 17.1. Пусть $C^{\bullet,\bullet}$ — бикомплекс, то есть биградуированная абелева группа с заданными коммутирующими дифференциалами $d' : C^{p,q} \to C^{p+1,q}$ и $d'' : C^{p,q} \to C^{p,q+1}$, (то есть $d' \circ d' = 0$, $d'' \circ d'' = 0$ и $d' \circ d'' = d'' \circ d'$). Положим $K^\bullet = \mathsf{Tot}(C^{\bullet,\bullet})$, то есть $K^n = \oplus_{p+q=n} C^{p,q}$, и $d_{|C^{p,q}} = d' + (-1)^p d''$. Рассмотрим на $K^\bullet$ фильтрацию $F'_i K^\bullet = \mathsf{Tot}(C^{\ge i,\bullet})$, то есть $F'_i K^n = \oplus_{p+q=n,\ p\ge i} C^{p,q}$. Аналогично определеятеся фильтрация $F''_i K^\bullet = \mathsf{Tot}(C^{\bullet,\ge i})$, то есть $F''_i K^n = \oplus_{p+q=n,\ q\ge i} C^{p,q}$.

Упражнение 17.2. Проверьте, что $K^\bullet$ — комплекс, $F'_\bullet$ и $F''_\bullet$ — регулярные убывающие фильтрации, и $G^i_{F'} K^\bullet = (C^{i,\bullet}[-i], (-1)^i d'')$, $G^i_{F''} K^\bullet = (C^{\bullet,i}[-i], d')$.

Полезны также следующие два примера:

Пример 17.3. Пусть $K^\bullet$ — комплекс. Положим

$$\sigma_{\ge p} K^n = \begin{cases} 0, & n < p \\ K^n, & n \ge p \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \tau_{\le -p} K^n = \begin{cases} K^n, & n < -p \\ \operatorname{Ker} d^n, & n = -p \\ 0, & n \ge -p \end{cases}$$

Фильтрация $\dots \sigma_{\ge p+1} K^\bullet \subset \sigma_{\ge p} K^\bullet \subset \sigma_{\ge p-1} K^\bullet \subset \dots$ называется глупой, а фильтрация $\dots \tau_{\le -(p+1)} K^\bullet \subset \tau_{\le -p} K^\bullet \subset \tau_{\le -(p-1)} K^\bullet \subset \dots$ — канонической.

Возникает вопрос, можно ли в терминах когомологий комплексов $G_F^i K^\bullet$ описать когомологии исходного комплекса. Рассмотрим вначале пример.

Пусть $F_\bullet$ — фильтрация длины 2, то есть $F_0 K^\bullet = K^\bullet$ и $F_2 K^\bullet = 0$. Иначе говоря, имеем точную последовательность

$$0 \to G_F^1 K^\bullet \to K^\bullet \to G_F^0 K^\bullet \to 0,$$

которая по лемме о змее дает длинную точную последовательность когомологий $\dots \to H^i(K^\bullet) \to H^i(G_F^0 K^\bullet) \xrightarrow{\partial^i} H^{i+1}(G_F^1 K^\bullet) \to H^{i+1}(K^\bullet) \to \dots$ Иначе говоря, получаем точные тройки $0 \to \operatorname{Coker} \partial^{i-1} \to H^i(K^\bullet) \to \operatorname{Ker} \partial^i \to 0$. Таким образом, на когомологиях $H^i(K^\bullet)$ возникает фильтрация длины 2, присоединенные факторы которой вычисляются дифференциалом ∂, действующим в когомологиях присоединенных комплексов. Аналогичная ситуация возникает и в общем случае — на когомологиях присоединенных комплексов возникает последовательность дифференциалов, вычисляя когомологии которых, мы в конечном итоге получаем присоединенные факторы некоторой фильтрации, возникающей на когомологиях исходного комплекса. Эта последовательность дифференциалов и называется спектральной последовательностью.

Опишем ее явно. Пусть

$$Z_r^{p,q} = F_pK^{p+q} \cap d^{-1}(F_{p+r}K^{p+q+1}) = \{x \in F_pK^{p+q} \mid dx \in F_{p+r}K^{p+q+1}\}.$$

Если $r = 0$, то ясно, что $Z_0^{p,q} = F_pK^{p+q}$. Кроме того, ясно, что $Z_0^{p,q} \supset Z_1^{p,q} \supset Z_2^{p,q} \supset \dots$ — убывающая фильтрация. Если фильтрация члена K^{p+q+1} конечна, т.е. $F_{p+r}K^{p+q+1} = 0$ при $r \gg 0$, то фильтрация $Z_r^{p,q}$ стабилизируется, т.е. при $r \gg 0$ имеем $Z_r^{p,q} = Z_{r+1}^{p,q}$ (если $F_{p+r}K^{p+q+1} = 0$, то $Z_r^{p,q} = F_pK^{p+q} \cap \operatorname{Ker} d$).

Лемма 17.4. *Имеем* $Z_r^{p,q} \subset Z_{r+1}^{p-1,q+1}$.

Доказательство: По определению, $Z_r^{p,q} = F_pK^{p+q} \cap d^{-1}(F_{p+r}K^{p+q+1})$, а $Z_{r+1}^{p-1,q+1} = F_{p-1}K^{p+q} \cap d^{-1}(F_{p+r}K^{p+q+1})$. □

Определим теперь

$$E_r^{p,q} = Z_r^{p,q}/(Z_{r-1}^{p+1,q-1} + dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}).$$

Лемма 17.5. *Имеем* $E_1^{p,q} = H^{p+q}(G_F^pK^\bullet)$.

Доказательство: По определению

$$E_1^{p,q} = \{x \in F_pK^{p+q} \mid dx \in F_{p+1}K^{p+q+1}\}/(F_{p+1}K^{p+q} + dF_pK^{p+q-1}).$$

Всякому $x \in E_1^{p,q}$ сопоставим его образ $\bar{x} \in F_pK^{p+q}/F_{p+1}K^{p+q} = G_F^pK^{p+q}$. Ясно, что $d(\bar{x}) = 0$, так как $dx \in F_{p+1}K^{p+q+1}$. То есть $\bar{x} \in \operatorname{Ker} d$. При этом факторизация по dF_pK^{p+q-1} в определении $E_1^{p,q}$ превращается в факторизацию по $\operatorname{Im} d$ в $G_F^pK^{p+q}$. □

Лемма 17.6. *d индуцирует дифференциал* $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$.

Доказательство: Пусть $x \in Z_r^{p,q}$. Тогда $dx \in F_{p+r}K^{p+q}$ по определению, причем $ddx = 0$, то есть $ddx \in F_{p+2r}K^{p+q+1}$, так что $dx \in Z_r^{p+r,q-r+1}$. При этом, если $x \in Z_{r-1}^{p+1,q-1}$, то $dx \in dZ_{r-1}^{p+1,q-1} = dZ_{r-1}^{(p+r)-r+1,(q-r+1)+r-2}$, а если $x \in dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}$, то $dx = 0$. Так что действительно индуцируется оператор $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$. Его квадрат очевидно равен нулю. □

Упражнение 17.7. Покажите, что $d_1^{p,q} : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$ совпадает со связывающим гомоморфизмом $\partial : H^{p+q}(G_F^pK^\bullet) \to H^{p+q+1}(G_F^{p+1}K^\bullet)$ из точной последовательности когомологий, возникающей из точной тройки комплексов $0 \to G_F^{p+1}K^\bullet \to F_pK^\bullet/F_{p+2}K^\bullet \to G_F^pK^\bullet \to 0$.

Лемма 17.8. $\operatorname{Ker} d_r^{p,q}/\operatorname{Im} d_r^{p-r,q+r-1} \cong E_{r+1}^{p,q}$.

Доказательство: Пусть $\bar{x} \in E_r^{p,q}$, а $x \in Z_r^{p,q}$ — его представитель. Если $d_r^{p,q}\bar{x} = 0$ в $E_r^{p+r,q-r+1}$, то $dx \in Z_r^{p+r,q-r+1}$ лежит в $Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} + dZ_{r-1}^{p+1,q-1}$. Ясно, что меняя представитель x на элемент из $Z_{r-1}^{p+1,q-1}$ можно считать, что $dx \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} \subset F_{p+r+1}K^{p+q+1}$. Значит $x \in Z_{r+1}^{p,q}$. Рассмотрим его класс $\alpha(\bar{x}) \in E_{r+1}^{p,q}$. Получаем отображение $\alpha : \operatorname{Ker} d_r^{p,q} \to E_{r+1}^{p,q}$.

Корректность. Если $x' \in Z_r^{p,q}$ — другой представитель $\bar{x}$, такой что $dx' \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}$. Тогда $x - x'$ можно записать в виде $y_1 + y_2$, где $y_1 \in Z_{r-1}^{p+1,q-1}$, $y_2 \in dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}$. Тогда $dy_1 = d(y_1+y_2) = d(x-x') = dx - dx' \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} \subset F_{p+r+1}K^{p+q+1}$. При этом $y_1 \in F_{p+1}K^{p+q}$, поэтому $y_1 \in Z_r^{p+1,q-1}$. С другой стороны, $y_2 \in dZ_r^{p-r,q+r-1}$ по лемме 17.4. Значит $\alpha(x - x') = 0$.

Ядро. Пусть $\alpha(\bar{x}) = 0$. Значит $x \in Z_r^{p+1,q-1} + dZ_r^{p-r,q+r-1}$. Заметим, что $Z_r^{p+1,q-1} \subset Z_{r-1}^{p+1,q-1}$, так что можно считать, что $x \in dZ_r^{p-r,q+r-1}$. Но тогда $x \in \operatorname{Im} d_r^{p-r,q+r-1}$. И наоборот, если $\bar{x} = d_r^{p-r,q+r-1}(\bar{y})$, то $x = dy$, $y \in Z_r^{p-r,q+r-1}$, поэтому $\alpha(\bar{x}) = 0$.

Образ. Возьмем произвольный элемент в $E_{r+1}^{p,q}$ и поднимем его в $Z_{r+1}^{p,q}$. Так как $Z_{r+1}^{p,q} \subset Z_r^{p,q}$, получим тем самым элемент из $x \in Z_r^{p,q}$, а дополнительное условие $dx \in F_{p+r+1}K^{p+q+1}$ даст $d_r^{p,q}(\bar{x}) = 0$. Значит α сюръективно. □

Напомним, что из конечности и регулярности фильтрации $F_\bullet K^\bullet$ на каждом члене комплекса K следует стабилизация групп $Z_r^{p,q}$ для всех p, q, а значит и групп $E_r^{p,q}$. Обозначим через $Z_\infty^{p,q}$ и $E_\infty^{p,q}$ стабильные значения.

Рассмотрим теперь $E^n := H^n(K^\bullet)$. Обозначим через $F_iE^n \subset E^n$ образ $H^n(F_iK^\bullet)$ в $H^n(K^\bullet)$.

Теорема 17.9. *Предположим, что фильтрация $F_\bullet K^\bullet$ конечна и регулярна на каждом члене комплекса K. Тогда $E_\infty^{p,q} \cong F_pE^{p+q}/F_{p+1}E^{p+q}$.*

Доказательство: При $r \gg 0$ имеем

$$Z_r^{p,q} = F_pK^{p+q} \cap d^{-1}(F_{p+r}K^{p+q+1}) = F_pK^{p+q} \cap d^{-1}(0),$$
$$dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} = d(F_{p-r+1}K^{p+q-1} \cap d^{-1}(F_pK^{p+q})) = d(K^{p+q-1}) \cap F_pK^{p+q}.$$

Поэтому $E_\infty^{p,q} = (F_pK^{p+q} \cap \operatorname{Ker} d)/(F_{p+1}K^{p+q} \cap \operatorname{Ker} d + F_pK^{p+q} \cap \operatorname{Im} d)$.

Пусть $\bar{x} \in F_pE^{p+q}$. Пусть $x \in H^{p+q}(F_pK^\bullet)$ — его представитель. Значит $x \in F_pK^{p+q}$, $dx = 0$. Значит $x \in Z_\infty^{p,q}$. Обозначим через $\beta(\bar{x})$ его образ в $E_\infty^{p,q}$.

Корректность. Если x' — другой представитель, то $x - x' \in F_pK^{p+q} \cap \operatorname{Im} d$, поэтому $\beta(x') = \beta(x)$.

Ядро. Пусть $\beta(\bar{x}) = 0$. Значит $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in F_{p+1}K^{p+q} \cap \operatorname{Ker} d$, $x_2 \in F_pK^{p+q} \cap \operatorname{Im} d$. Но тогда $\bar{x} = \bar{x}_1 \in F_{p+1}E^{p+q}$. Поэтому $\operatorname{Ker}\beta = F_{p+1}E^{p+q}$.

Образ. Сюръективность очевидна. □

Утверждение теоремы описывается словами так: спектральная последовательность с первым членом $E_1^{p,q} = H^{p+q}(G_F^pK^\bullet)$ сходится к $E^n = H^n(K^\bullet)$, записывается $E_1^{p,q} = H^{p+q}(G_F^pK^\bullet) \Longrightarrow E^n = H^n(K^\bullet)$.

Рассмотрим спектральную последовательность связанную с фильтрацией тотального комплекса бикомплекса.

Теорема 17.10. *Если $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\{p \in \mathbb{Z} \mid C^{p,n-p} \neq 0\}$ конечно (диагонали бикомплекса ограничены), то существует спектральная последовательность со вторым членом $E_2^{p,q} = H_{d'}^p(H_{d''}^q(C^{\bullet,\bullet}))$, сходящаяся к $E^n = H^n(\mathsf{Tot}(C^{\bullet,\bullet}))$.*

Доказательство: Рассмотрим фильтрацию F' на $K^\bullet = \mathsf{Tot}(C^{\bullet,\bullet})$. Тогда $E_1^{p,q} = H^{p+q}(G_{F'}^pK^\bullet) = H^{p+q}(C^{p,\bullet}[-p], (-1)^pd'') = H_{d''}^q(C^{p,\bullet})$. Остается заметить, что дифференциал $d_1^{p,q}$ индуцирован дифференциалом $d = d' + (-1)^pd''$ совпадает на $E_1^{p,q}$ с d'. □

Транспонируя бикомплекс, получаем вторую спектральную последовательность $E_2^{p,q} = H_{d''}^q(H_{d'}^p(C^{\bullet,\bullet}))$, которая тоже сходится к $E^n = H^n(\mathsf{Tot}(C^{\bullet,\bullet}))$.

Применим науку о спектральных последовательностях в следующей ситуации. Пусть F — произвольный пучок на многообразии X, $\cdots \to F^{-2} \to F^{-1} \to F^0 \to F \to 0$ — его резольвента, а $f : X \to Y$ — морфизм. Выберем аффинное покрытие X над Y и рассмотрим бикомплекс $C^{p,q} = f_*(\underline{\mathcal{C}}_{F^p}^q)$, в котором d'' — дифференциал Чеха, а d' — индуцирован дифференциалом в комплексе $F^\bullet$. Рассмотрим спектральные последовательности этого бикомплекса.

Лемма 17.11. $H^q_{d''}(H^p_{d'}(C^{\bullet,\bullet})) = \begin{cases} R^q f_*(F), & p = 0 \\ 0, p \neq 0 \end{cases}$

Доказательство: Действительно, $H^p_{d'}(C^{\bullet,q}) = f_*(\underline{\mathcal{C}}^q_{\mathcal{H}^p(F^\bullet)})$ так как $\underline{\mathcal{C}}^q_{(-)}$ — точный функтор. Но $\mathcal{H}^p(F^\bullet) = F$ при $p = 0$ и нулю иначе. $\square$

Из леммы сразу следует, что $E^n = R^n f_*(F)$.

Следствие 17.12. *Существует спектральная последовательность с первым членом $E_1^{p,q} = R^q f_* F^p$, которая сходится к $E^n = R^n f_*(F)$.*

Доказательство: Действительно, $H^q_{d''}(C^{p,\bullet}) = R^q f_*(F^p)$. $\square$

Упражнение 17.13. **(1)** Пусть $F^\bullet$ — произвольный комплекс пучков на X. Постройте две спектральные последовательности: $'E_2^{p,q} = R^q f_*(\mathcal{H}^p(F^\bullet))$ и $''E_1^{p,q} = R^q f_*(F^p)$, которые сходятся к одному и тому же (к n-му гиперпрямому образу комплекса). **(2)** Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ и F — пучок на X. Докажите, что существует спектральная последовательность $E_2^{p,q} = R^q g_*(R^p f_*(F))$, которая сходится к $R^n(g \circ f)_*(F)$.

Воспользуемся теперь построенной спектральной последовательностью в очень специальной ситуации. Рассмотрим $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$. Пусть $\pi_1, \pi_2 : X \to \mathbb{P}^n$ — проекции. Будем для краткости обозначать $\pi_1^* F \otimes \pi_2^* G$ через $F \boxtimes G$. Рассмотрим пучок $\mathcal{O}(1) \boxtimes T(-1)$ и его сечение s, соответствующее морфизму $\mathcal{O}(-1) \boxtimes \mathcal{O} \to V \otimes (\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{O}) \to \mathcal{O} \boxtimes T(-1)$.

Лемма 17.14. *Множество нулей сечениея s — диагональ $\Delta(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$.*

Доказательство: Возьмем точку $(v, w) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$. Над ней сечение задается композицией $\mathbb{C}v \to V \to V/\mathbb{C}w$, поэтому оно равно нулю при $v = w$. $\square$

Упражнение 17.15. Покажите, что $\Delta(\mathbb{P}^n) = \{s = 0\}$ как схема, то есть $J_{\Delta(\mathbb{P}^n)} = \mathrm{Im}(\mathcal{O}(-1) \boxtimes \Omega^1(1) \xrightarrow{s} \mathcal{O})$.

Поскольку $r(\mathcal{O}(1) \boxtimes T(-1)) = n = \operatorname{codim} \Delta(\mathbb{P}^n)$, значит сечение s регулярное, и получаем резольвенту Кошуля

$$0 \to \mathcal{O}(-n) \boxtimes \Omega^n(n) \to \cdots \to \mathcal{O}(-1) \boxtimes \Omega^1(1) \to \mathcal{O} \boxtimes \mathcal{O} \to \Delta_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to 0.$$

Она называется резольвентой диагонали. Возьмем теперь произвольный пучок F на $\mathbb{P}^n$ и домножим резольвенту диагонали на $\pi_1^* F$.

Лемма 17.16. *Имеем изоморфизмы $\pi_1^* F \otimes (\mathcal{O}(-p) \boxtimes \Omega^p(p)) \cong F(-p) \boxtimes \Omega^p(p)$, $\pi_1^* F \otimes \Delta_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \cong \Delta_* F$, причем высшие* Tor*-ы равны нулю.*

Доказательство: Первое очевидно. Второе следует из формулы проекции $\pi_1^* F \otimes \Delta_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \cong \Delta_*(\Delta^* \pi_1^* F)$, так как $\pi_1 \circ \Delta = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^n}$. $\square$

Таким образом, получаем резольвенту пучка $\Delta_* F$:

$$0 \to F(-n) \boxtimes \Omega^n(n) \to \cdots \to F(-1) \boxtimes \Omega^1(1) \to F \boxtimes \mathcal{O} \to \Delta_* F \to 0.$$

Рассмотрим теперь спектральную последовательность для π_{2*}.

Лемма 17.17. *Имеем $R^q \pi_{2*}(F(-p) \boxtimes \Omega^p(p)) \cong H^q(\mathbb{P}^n, F(-p)) \otimes \Omega^p(p)$, а также $R^q \pi_{2*} \Delta_* F \cong F$ при $q = 0$ и нулю иначе.*

Доказательство: Первое следует из плоской замены базы. Второе очевидно, так как $\pi_2 \circ \Delta = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^n}$. $\square$

Применяя к полученной резольвенте пучка $\Delta_* F$ спектральную последовательность следствия 17.12, получаем.

Теорема 17.18 (Бейлинсон). *Существует спектральная последовательность* $E_1^{p,q} = H^q(\mathbb{P}^n, F(p)) \otimes \Omega^{-p}(-p) \implies E^0 = F,\ E^{\neq 0} = 0\ (-n \le p \le 0)$.

Аналогично, домножая резолвенту диагонали на π_2^* и рассматривая спектральную последовательность для π_{1*} получаем

Теорема 17.19 (Бейлинсон). *Существует спектральная последовательность* $E_1^{p,q} = H^q(\mathbb{P}^n, F \otimes \Omega^{-p}(-p)) \otimes \mathcal{O}(p) \implies E^0 = F,\ E^{\neq 0} = 0\ (-n \le p \le 0)$.

Применим вторую спектральную последовательность Бейлинсона в случае пучка на $\mathbb{P}^1$. Заметим, что на $\mathbb{P}^1$ имеем $\Omega^1(1) \cong \mathcal{O}(-1)$, поэтому спектральная последовательность имеет имеет вид

$$E_1^{\bullet,\bullet} = \left\{ \begin{array}{c} H^1(\mathbb{P}^1, F(-1)) \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{d_1} H^1(\mathbb{P}^1, F) \otimes \mathcal{O} \\ H^0(\mathbb{P}^1, F(-1)) \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{d_1} H^0(\mathbb{P}^1, F) \otimes \mathcal{O} \end{array} \right\}$$

и в конечном итоге получаем точную последовательность

$$0 \to H^0(\mathbb{P}^1, F(-1)) \otimes \mathcal{O}(-1) \to H^0(\mathbb{P}^1, F) \otimes \mathcal{O} \to F \to \\ \to H^1(\mathbb{P}^1, F(-1)) \otimes \mathcal{O}(-1) \to H^1(\mathbb{P}^1, F) \otimes \mathcal{O} \to 0.$$

Применим теперь эту же спектральную последовательность к пучку идеалов скрученной кубической кривой $C \subset \mathbb{P}^3$.

Лемма 17.20. *Имеем* $H^q(\mathbb{P}^3, J_C \otimes \Omega^p(p)) = 0$ *при* $p = 0, 1$ *и всех* q, *а также при* $p = 2$ *и* $q = 3$ *и при* $p = 0$ *и* $q \neq 2$.

Доказательство: Во-первых, заметим, что $H^q(\mathbb{P}^3, J_C(p)) = 0$ при $p = 0, 1$. Это легко следует из точной последовательности $0 \to J_C \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to i_*\mathcal{O}_C \to 0$. и изоморфизмов $H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}) \cong H^0(C, \mathcal{O}_C)$, $H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(1)) \cong H^0(C, \mathcal{O}_C(3))$. Из точной последовательности $0 \to \Omega^1(1) \to V^* \otimes \mathcal{O} \to \mathcal{O}(1) \to 0$ следуют первые два зануления, а из последовательности $0 \to \Omega^2(2) \to \Lambda^2 V^* \otimes \mathcal{O} \to \Omega^1(2) \to 0$ третье. Наконец, $\Omega^3(3) \cong \mathcal{O}(-1)$, поэтому $H^q(\mathbb{P}^3, J_C \otimes \Omega^3(3)) = H^q(\mathbb{P}^3, J_C(-1)) \cong H^{q-1}(C, \mathcal{O}_C(-3)) = \mathbb{C}^2$ при $q = 2$ и нулю иначе. $\square$

Итак, спектральная последовательность принимает вид

$$E_1^{\bullet,\bullet} = \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & H^3(\mathbb{P}^3, J_C \otimes \Omega^2(2)) \otimes \mathcal{O}(-2) & 0 & 0 \\ \mathcal{O}(-3)^{\oplus 2} \xrightarrow{d_1} & H^2(\mathbb{P}^3, J_C \otimes \Omega^2(2)) \otimes \mathcal{O}(-2) & 0 & 0 \\ 0 & H^1(\mathbb{P}^3, J_C \otimes \Omega^2(2)) \otimes \mathcal{O}(-2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

откуда следует, что $H^3(\mathbb{P}^3, J_C \otimes \Omega^2(2)) = H^1(\mathbb{P}^3, J_C \otimes \Omega^2(2)) = 0$ и получается точная посл-ть $0 \to \mathcal{O}(-3)^{\oplus 2} \to H^2(\mathbb{P}^3, J_C \otimes \Omega^2(2)) \otimes \mathcal{O}(-2) \to J_C \to 0$. Глядя на ранги, видим, что второй член равен $\mathcal{O}(-2)^{\oplus 3}$, откуда получаем резольвенту

$$0 \to \mathcal{O}(-3)^{\oplus 2} \to \mathcal{O}(-2)^{\oplus 3} \to \mathcal{O} \to i_*\mathcal{O}_C \to 0.$$