17. Применения спектральных последовательностей Бейлинсона.

В прошлый раз мы построили для всякого когерентного пучка F на проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ две спектральные последовательности

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathbb{P}^n, F(p)) \otimes \Omega^{-p}(-p) \quad \Longrightarrow \quad E^0 = F,\ E^{\neq 0} = 0\ (-n \le p \le 0),$$

и

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathbb{P}^n, F \otimes \Omega^{-p}(-p)) \otimes \mathcal{O}(p) \quad \Longrightarrow \quad E^0 = F,\ E^{\neq 0} = 0\ (-n \le p \le 0).$$

Сегодня мы займемся применением этих спектральных последовательностей.

Теорема 17.1. *Всякий когерентный пучок на проективном пространстве имеет конечную резольвенту из прямых сумм линейных расслоений.*

Доказательство: Пусть $F \in \mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n)$. Для каждого $-n \le p \le 0$ выберем целое число N_p, такое что $H^{>0}(\mathbb{P}^n, F(t) \otimes \Omega^{-p}(-p)) = 0$ при $t \ge N_p$. Положим $N = \max\{N_p\}$. Рассмотрим вторую спектральную последовательность для пучка $F(N)$. Тогда $E_1^{p,q} = H^q(\mathbb{P}^n, F(N) \otimes \Omega^{-p}(-p)) \otimes \mathcal{O}(p)$ при $q > 0$ равно нулю, то есть спектральная последовательность имеет вид

$$E_1^{\bullet,\bullet} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ H^0(F(N) \otimes \Omega^n(n)) \otimes \mathcal{O}(-n) \xrightarrow{d_1} & \cdots & \xrightarrow{d_1} H^0(F(N)) \otimes \mathcal{O} \end{array} \right\}$$

Значит $E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q}$ и спектральная последовательность вырождается в точную последовательность

$$0 \to H^0(F(N) \otimes \Omega^n(n)) \otimes \mathcal{O}(-n) \to \cdots \to H^0(F(N)) \otimes \mathcal{O} \to F(N) \to 0.$$

Откручивая на $-N$ получаем искомую резольвенту пучка F. $\square$

Заметим, что приведенной выше теоремой мы пользовались при доказательстве теоремы Римана–Роха и двойственности Серра.

Перейдем теперь к более конкретным ситуациям. Нам понадобится следующая переформулировка теоремы Римана–Роха.

Упражнение 17.2. Пусть F — расслоение на $\mathbb{P}^n$, $r = r(F)$, $c_i = \mathrm{c}_i(F)$. Докажите, что **(1)** если $n = 2$, то $\chi(F(t)) = \frac{1}{2}c_1^2 + \frac{2t+3}{2}c_1 - c_2 + \frac{(t+1)(t+2)}{2}r$; **(2)** если $n = 3$, то $\chi(F) = \frac{1}{6}c_1^3 - \frac{1}{2}c_1c_2 + \frac{1}{2}c_3 + \frac{t+2}{2}(c_1^2 - 2c_2) + \frac{3t^2+12t+11}{6}c_1 + \frac{(t+1)(t+2)(t+3)}{6}r$.

Теорема 17.3. *Пусть F — стабильное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^2$ с $\mathrm{c}_1(F) = -1$, $\mathrm{c}_2(E) = 1$. Тогда $F \cong \Omega^1(1)$.*

Доказательство: $H^0(F) = H^0(F(-1)) = H^0(F(-2)) = 0$ в силу стабильности F. Аналогично, $\mathrm{Hom}(F, \mathcal{O}(-1)) = \mathrm{Hom}(F, \mathcal{O}(-2)) = \mathrm{Hom}(F, \mathcal{O}(-3)) = 0$. Однако, по двойственности Серра $\mathrm{Hom}(F, \mathcal{O}(-p)) \cong H^2(F(p-3))^*$, поэтому $H^2(F) = H^2(F(-1)) = H^2(F(-2)) = 0$. Наконец, по теореме Римана–Роха $\chi(F) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 1 + 2 = 0$, $\chi(F(-1)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 = -1$, $\chi(F(-2)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$, поэтому $H^1(F) = H^1(F(-2)) = 0$, $H^1(F(-1)) = \mathbb{C}$. Значит первая спектральная последовательность Бейлинсона имеет вид

$$E_1^{\bullet,\bullet} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega^1(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

и теорема доказана. $\square$

Теорема 17.4. *Пусть F — стабильное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^2$ с $\mathrm{c}_1(F) = 0$, $\mathrm{c}_2(E) = 2$. Тогда $F \cong \mathrm{Coker}(\mathcal{O}(-1)^{\oplus 2} \hookrightarrow \Omega^1(1)^{\oplus 2})$.*

Доказательство: Аналогично доказательству предыдущей теоремы имеем $H^0(F) = H^0(F(-1)) = H^0(F(-2)) = H^2(F) = H^2(F(-1)) = H^2(F(-2)) = 0$. Далее, по теореме Римана–Роха $\chi(F) = -2+2 = 0$, $\chi(F(-1)) = \chi(F(-2)) = -2$, поэтому $H^1(F) = 0$, $H^1(F(-1)) = H^1(F(-2)) = \mathbb{C}^2$. Значит первая спектральная последовательность Бейлинсона имеет вид

$$E_1^{\bullet,\bullet} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \Omega^2(2)^{\oplus 2} \xrightarrow{d_1} & \Omega^1(1)^{\oplus 2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

и теорема доказана, так как $\Omega^2(2) \cong \mathcal{O}(-1)$. $\square$

Теорема 17.5. *Пусть F — полустабильное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^2$, такое что $\mathrm{c}_1(F) = 0$, $\mathrm{c}_2(F) = m$. Тогда F изоморфно когомологии в среднем члене комплекса $0 \to \mathcal{O}(-1)^{\oplus m} \to \mathcal{O}^{\oplus(2m+2)} \to \mathcal{O}(1)^{\oplus m} \to 0$.*

Доказательство: Аналогично доказательству предыдущей теоремы имеем $H^0(F(-1)) = H^0(F(-2)) = H^0(F(-3)) = H^2(F) = H^2(F(-1)) = H^2(F(-2)) = 0$. Вычислим теперь $H^p(F \otimes \Omega^1)$. Для этого воспользуемся точной последовательностью $0 \to \Omega^1 \to \mathcal{O}(-1)^{\oplus 3} \to \mathcal{O} \to 0$. Тензорно домножая ее на F получаем $H^0(F \otimes \Omega^1) = 0$. Далее, пользуясь изоморфизмом $\Omega^1 \cong \Omega^2 \otimes T \cong T(-3)$ из точной полседовательности Эйлера получаем $0 \to \mathcal{O}(-3) \to \mathcal{O}(-2)^{\oplus 3} \to \Omega^1 \to 0$, откуда следует $H^2(F \otimes \Omega^1) = 0$. Рассмотрим теперь вторую спектральную последовательность Бейлинсона для пучка $F(-1)$. Так как очевидно $F(-1) \otimes \Omega^1(1) = F \otimes \Omega^1$, $F(-1) \otimes \Omega^2(2) \cong F(-2)$, она имеет вид

$$E_1^{\bullet,\bullet} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ H^1(F(-2)) \otimes \mathcal{O}(-2) \xrightarrow{d_1} & H^1(F \otimes \Omega^1) \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{d_1} & H^1(F(-1)) \otimes \mathcal{O} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

Отсюда заключаем, что $F(-1)$ является когомологией в среднем члене комплекса

$$0 \to H^1(F(-2)) \otimes \mathcal{O}(-2) \to H^1(F \otimes \Omega^1) \otimes \mathcal{O}(-1) \to H^1(F(-1)) \otimes \mathcal{O} \to 0 \quad (*)$$

Наконец, $\chi(F(-1)) = \chi(F(-2)) = -m$, значит $H^1(F(-1)) = H^1(F(-2)) = \mathbb{C}^m$, а так как ранг F равен 2, то $H^1(F \otimes \Omega^1) = \mathbb{C}^{2m+2}$. Подкручивая на $\mathcal{O}(1)$, получаем искомый комплекс. $\square$

В дальнейшем, теорема 17.5 будет использована для описания многообразия модулей полустабильных расслоений на $\mathbb{P}^2$.

Представление расслоений как средней когомологии трехчленных комплексов достаточно распространено, поэтому такие комплексы имеют специальное название.

Определение. Комплекс вида $0 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 0$, где A, B, C — расслоения, a — вложение расслоений, а b — сюръекция называется монадой. Расслоение $E = \operatorname{Ker} b / \operatorname{Im} a$ называется когомологией монады.

Упражнение 17.6. Проверьте равенства $r(E) = r(B) - r(A) - r(C)$, $\mathrm{c}(E) = \mathrm{c}(B)\,\mathrm{c}(A)^{-1}\,\mathrm{c}(C)^{-1}$. В частности, $\mathrm{c}_1(E) = \mathrm{c}_1(B) - \mathrm{c}_1(A) - \mathrm{c}_1(C)$.

Упражнение 17.7. Пусть F — расслоение на $\mathbb{P}^2$ любого ранга, такое что $H^0(F(-1)) = H^0(F^*(-1)) = 0$. Покажите, что F является когомологией монады $(*)$.

Теорема 17.8. *Пусть $F \cong F^*$ — самодвойственное расслоение на $\mathbb{P}^3$, такое что $H^0(F) = H^1(F(-2)) = 0$. Тогда F является когомологией монады*

$$0 \to H^2(F(-3)) \otimes \mathcal{O}(-1) \to H^2(F \otimes \Omega^2) \otimes \mathcal{O} \to H^2(F \otimes \Omega^1(-1)) \otimes \mathcal{O}(1) \to 0.$$

Доказательство: Из $H^0(F) = 0$ легко следует $H^0(F(-1)) = H^0(F(-2)) = H^0(F(-3)) = 0$, откуда по двойственности Серра $H^0(F(-t)) \cong H^3(F^*(t-4))^*$ получаем $H^3(F(-2)) = H^3(F(-3)) = 0$. Далее, пользуясь точной последовательностью

$$0 \to \Omega^1 \to \mathcal{O}(-1)^{\oplus 4} \to \mathcal{O} \to 0,$$

ее внешним квадратом

$$0 \to \Omega^2 \to \mathcal{O}(-2)^{\oplus 6} \to \Omega^1 \to 0,$$

и последовательностью

$$0 \to \mathcal{O}(-4) \to \mathcal{O}(-3)^{\oplus 4} \to \Omega^2 \to 0$$

(получающейся из точной последовательности Эйлера откруткой на -4 ввиду изоморфизма $\Omega^2 \cong \Omega^3 \otimes T \cong T(-4)$), выводим $H^0(F \otimes \Omega^1(-1)) = H^0(F \otimes \Omega^2) = 0$, а также $H^3(F \otimes \Omega^1(-1)) = H^3(F \otimes \Omega^2) = 0$. Далее, пользуясь равенством $H^1(F(-2)) = 0$, получаем $H^1(F \otimes \Omega^1(-1)) = H^1(F \otimes \Omega^2) = 0$. Наконец, по двойственности Серра $H^2(F(-2)) = H^1(F^*(-2)) = H^1(F(-2)) = 0$. Рассмотрим теперь вторую спектральную последовательность Бейлинсона для пучка $F(-2)$. Так как очевидно $F(-2) \otimes \Omega^1(1) = F \otimes \Omega^1(-1)$, $F(-2) \otimes \Omega^2(2) \cong F \otimes \Omega^2$, $F(-2) \otimes \Omega^3(3) \cong F(-3)$, она имеет вид

$$E_1^{\bullet,\bullet} = \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ H^2(F(-3)) \otimes \mathcal{O}(-3) \xrightarrow{d_1} & H^2(F \otimes \Omega^2) \otimes \mathcal{O}(-2) \xrightarrow{d_1} & H^1(F \otimes \Omega^1(-1)) \otimes \mathcal{O}(-1) & 0 \\ H^1(F(-3)) \otimes \mathcal{O}(-3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

Отсюда заключаем, что $H^1(F(-3)) = 0$, и $F(-2)$ является когомологией монады

$$0 \to H^2(F(-3)) \otimes \mathcal{O}(-3) \to H^2(F \otimes \Omega^2) \otimes \mathcal{O}(-2) \to H^1(F \otimes \Omega^1(-1)) \otimes \mathcal{O}(-1) \to 0$$

Остается подкрутить ее на $\mathcal{O}(2)$. $\square$

Упражнение 17.9. Докажите, что если F — стабильное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ и $\mathrm{c}_1(F) = 0$, то $F \cong F^*$ и $H^0(F) = 0$.

17.1. **Расслоение Хоррокса–Мамфорда.** Расслоение Хоррокса–Мамфорда — это стабильное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^4$. Оно является по существу единственным известным примером стабильного расслоения на $\mathbb{P}^n$ ранга $r < n$ при $n \geq 4$. Исторически оно было построено с помощью конструкции Серра, примененной к двумерному комплексному тору, лежащему в $\mathbb{P}^4$ в виде поверхности степени 10. Существование такой поверхности обнаружил Мамфорд.

Лемма 17.10 (Мамфорд). *В $\mathbb{P}^4$ существует гладкое двумерное подмногообразие $Y \cong \mathbb{P}^4$ изоморфное комплексному тору $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4$. При этом $\deg Y = 10$, $H^{>0}(Y, \mathcal{O}_Y(t)) = 0$ и $\dim H^0(Y, \mathcal{O}_Y(t)) = 5t^2$ при $t > 0$, где $\mathcal{O}_Y(t) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(t)_{|Y}$, и $H^q(Y, \mathcal{O}_Y) = \binom{2}{q}$. Кроме того, Y не лежит ни в какой в квадрике.*

Доказательство: Существование гладкого тора степени 10 в $\mathbb{P}^4$ — факт глубоко нетривиальный и его доказательство выходит за рамки нашего курса, а утверждения о размерностях групп когомологий вытекают из теоремы Кодаиры о занулении (ее мы не проходили) и теоремы Римана–Роха. $\square$

Лемма 17.11. $\det \mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^4} \cong \mathcal{O}_Y(5)$.

Доказательство: Рассмотрим точную последовательность присоединения $0 \to T_Y \to T_{\mathbb{P}^4|Y} \to \mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^4} \to 0$. Расслоение T_Y тривиально, так как $Y = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4$, поэтому $\det \mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^4} \cong \det T_{\mathbb{P}^4|Y} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5)_{|Y} \cong \mathcal{O}_Y(5)$. $\square$

Пусть E — расслоение, полученное применением конструкции Серра к Y, так что имеем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O} \to E \to J_Y(5) \to 0. \tag{$\dagger$}$$

Таким образом $\mathrm{c}_1(E) = 5$.

Лемма 17.12. *Имеем $H^0(J_Y(2)) = 0$. В частности расслоение E стабильно.*

Доказательство: Если $H^0(J_Y(2)) \neq 0$, то тор Y лежал бы в квадрике, что не верно. Поэтому $H^0(J_Y(2)) = 0$. Отсюда следует, что $H^0(E(-3)) = 0$, и так как $E(-3)$ нормализованое ранга 2, то $E(-3)$ (а значит и E) стабильно. $\square$

Рассмотрим первую спектральную последовательность Бейлинсона, примененную к нормализованному расслоению $E(-3)$.

Лемма 17.13. *Имеем $H^1(E(-3)) = H^3(E(-7)) = \mathbb{C}^5$, $H^2(E(-5)) = \mathbb{C}^2$, а остальные когомологии расслоений $E(-3-p)$ при $0 \leq p \leq 4$ равны нулю.*

Доказательство: Подкручивая точную последовательность ($\dagger$) на -3 получаем $H^\bullet(E(-3)) = H^\bullet(J_Y(2))$. Далее, из точной последовательности

$$0 \to J_Y \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4} \to \mathcal{O}_Y \to 0,$$

подкрученной на 2 и леммы 17.10 следует $\dim H^1(J_Y(2)) = 5 \cdot 2^2 - 5 \cdot 6/2 = 20 - 15 = 5$ и зануление остальных когомологий пучка $J_Y(2)$. Аналогично, $H^\bullet(E(-4)) = H^\bullet(J_Y(1))$, и $\dim H^1(J_Y(1)) = 5 \cdot 1^2 - 5 = 0$ и зануление остальных когомологий пучка $J_Y(1)$. Наконец, из леммы 17.10 следует, что $H^0(J_Y) = H^1(J_Y) = 0$, $H^2(J_Y) = \mathbb{C}^2$, откуда, пользуясь последовательностью ($\dagger$), получаем $H^0(E(-5)) = H^1(E(-5)) = 0$, $H^2(E(-5)) = \mathbb{C}^2$. Для вычисления остальных когомологий воспользуемся двойственностью Серра. Так как $\det E \cong \mathcal{O}(5)$, то $E^* \cong E(-5)$, поэтому $H^q(E(-5-t)) = H^q(E^*(-t)) \cong H^{4-q}(E(t-5))^*$, что и завершает доказательство леммы. $\square$

Итак, первый член спектральной последовательности имеет вид

$$E_1^{\bullet,\bullet} = \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{O}(-1)^{\oplus 5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega^2(2)^{\oplus 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{O}^{\oplus 5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}, \qquad \mathcal{O}(-1)^{\oplus 5} \xrightarrow{d_2} \Omega^2(2)^{\oplus 2} \xrightarrow{d_2} \mathcal{O}^{\oplus 5}$$

Отсюда немедленно получается

Теорема 17.14. *Расслоение Хоррокса–Мамфорда является когомологией монады* $0 \to \mathcal{O}(2)^{\oplus 5} \to \Omega^2(5)^{\oplus 2} \to \mathcal{O}(3)^{\oplus 5} \to 0$.

Покажем теперь, как задать морфизмы в монаде, чтобы ее когоммологией было расслоение Хоррокса–Мамфорда. Пусть $\mathbb{P}^4 = \mathbb{P}(V)$ и v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 — базис в V. Рассмотрим отображения $\alpha_\pm : V \to \Lambda^2 V$, заданные формулами

$$\alpha_+(v_i) = v_{i+2} \wedge v_{i+3}, \qquad \alpha_-(v_i) = v_{i+1} \wedge v_{i+4},$$

где все индексы следует понимать по модулю 5. Заметим теперь, что точная последовательность $0 \to \Omega \to V^* \otimes \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to 0$ дает точные последовательности

$$0 \to \Omega^2 \xrightarrow{\lambda} \Lambda^2 V^* \otimes \mathcal{O}(-2) \to V^* \otimes \mathcal{O}(-1),$$
$$V \otimes \mathcal{O}(-4) \to \Lambda^2 V \otimes \mathcal{O}(-3) \xrightarrow{\mu} \Omega^2 \to 0.$$

(вторая из них получается из первой сопряжением и подкруткой на -5, так как $\Omega^2 = \Omega^4 \otimes \Lambda^2 T = \Lambda^2 T(-5)$). Рассмотрим теперь морфизмы

$$a : V \otimes \mathcal{O}(2) \xrightarrow{\alpha_+, \alpha_-} \Lambda^2 V \otimes \mathcal{O}(2)^{\oplus 2} \xrightarrow{\mu} \Omega^2(5)^{\oplus 2},$$
$$b : \Omega^2(5)^{\oplus 2} \xrightarrow{\lambda} \Lambda^2 V^* \otimes \mathcal{O}(3)^{\oplus 2} \xrightarrow{-\alpha_-^*, \alpha_+^*} V^* \otimes \mathcal{O}(3)$$

Лемма 17.15. *Морфизм* a *— вложение расслоений,* b *— сюръекция,* $b \circ a = 0$.

Доказательство: Пусть в точке $u \in \mathbb{P}(V)$ найдется $v = \sum x_i v_i \in V$, такой что $\mu(\alpha_+(v)) = \mu(\alpha_-(v)) = 0$. Так как слой пучка Ω_2 в точке u отождествляется с $\Lambda^2 V / V \wedge u$, то это означает, что $\alpha_+(v) = w_+ \wedge u$, $\alpha_-(v) = w_- \wedge u$ для каких-то векторов $w_+, w_- \in V$. Но тогда $\alpha_+(v) \wedge \alpha_-(v) = 0$. Однако, легко видеть, что $\alpha_+(v) \wedge \alpha_-(v) = \sum x_i^2 v_{i+1} \wedge v_{i+2} \wedge v_{i+3} \wedge v_{i+4}$, откуда получаем $x_i^2 = 0$ для всех i, то есть $v = 0$. Значит a — вложение расслоений. Далее, легко видеть, что морфизм b сопряжен к a относительно стандартной симплектической формы на $\mathbb{C}^2$, поэтому b — сюръекция. Наконец, по определению значение композиции $b \circ a$ в точке $u \in \mathbb{P}(V)$ на векторе v_i равно $\alpha_+^*(\alpha_-(v_i) \wedge u) - \alpha_-^*(\alpha_+(v_i) \wedge u) \in V^*$. спаривая с вектором $v_j \in V$, получаем $(\alpha_+(v_j) \wedge \alpha_-(v_i) - \alpha_-(v_j) \wedge \alpha_+(v_i)) \wedge u$. Но $\alpha_+(v_j) \wedge \alpha_-(v_i) - \alpha_-(v_j) \wedge \alpha_+(v_i) = v_{j+2} \wedge v_{j+3} \wedge v_{i+1} \wedge v_{i+4} - v_{j+1} \wedge v_{j+4} \wedge v_{i+2} \wedge v_{i+3}$. При $i \neq j$ каждое из слагаемых равно нулю, а при $i = j$ равны сами слагаемые. В обоих случаях получаем ноль. $\square$

Таким образом, следующая последовательность является монадой.

$$0 \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}(2) \xrightarrow{a} \Omega^2(5)^{\oplus 2} \xrightarrow{b} V^* \otimes \mathcal{O}(3) \longrightarrow 0$$

Упражнение 17.16. Докажите, что **(1)** когомология E этой монады является стабильным расслоением ранга 2 с $c_1 = 5$, $c_2 = 10$. **(2)*** множество нулей общего сечения расслоения E является гладким двумерным тором.