19. Многообразие модулей расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^2$.

Дл построения многообразия модулей расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^2$ с $c_1 = 0$ и $c_2 = m$ мы воспользуемся их монадным описанием, полученным на прошлой лекции, то есть тем, что всякое такое полустабильное расслоение является когомологией монады

$$0 \longrightarrow H \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{a} K \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{b} H' \otimes \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0, \qquad (*)$$

где $\dim H = \dim H' = m$, $\dim K = 2m + 2$. Первый вопрос — насколько однозначно такая монада определяется расслоением.

Определение. Пусть $0 \to A_1 \xrightarrow{a_1} A_2 \xrightarrow{a_2} A_3 \to 0$ и $0 \to B_1 \xrightarrow{b_1} B_2 \xrightarrow{b_2} B_3 \to 0$ — две монады. Гомоморфизмом монад (из A в B) называется набор гомоморфизмов $f_i : A_i \to B_i$, коммутирующий с дифференциалами, то есть такой, что $b_i \circ f_i = f_{i+1} \circ a_i$, $i = 1, 2$ (иначе говоря, это гомоморфизм комплексов).

Ясно, что гомоморфизм монад индуцирует гомоморфизм их когомологий. При некоторых условиях верно и обратное.

Лемма 19.1. *Пусть $0 \to C_1 \to C_2 \to C_3 \to 0$ и $0 \to D_1 \to D_2 \to D_3 \to 0$ — точные тройки. Если $\mathrm{Hom}(C_3, D_2) = \mathrm{Ext}^1(C_3, D_2) = 0$, то любой морфизм $C_1 \to D_1$ однозначно продолжается до морфизма точных троек $C_\bullet \to D_\bullet$, а если $\mathrm{Hom}(C_2, D_1) = \mathrm{Ext}^1(C_2, D_1) = 0$, то любой морфизм $C_3 \to D_3$ однозначно продолжается до морфизма точных троек $C_\bullet \to D_\bullet$.*

Доказательство: Пусть $\phi \in \mathrm{Hom}(C_1, D_1)$. Компонируя его с вложением $D_1 \to D_2$, получаем $\phi' : C_1 \to D_2$. Применим к точной тройке $C_\bullet$ функтор $\mathrm{Hom}(-, D_2)$. Получим изоморфизм $\mathrm{Hom}(C_2, D_2) \cong \mathrm{Hom}(C_1, D_1)$, значит ϕ' можно единственным способом поднять до $\phi'' : C_2 \to D_2$. Компонируя его с проекцией $D_2 \to D_3$, получим $\phi''' : C_2 \to D_3$, причем его композиция с $C_1 \to C_2$ по построению равна композиции ϕ с $D_1 \to D_2 \to D_3$, то есть нулю. Применяя теперь к $C_\bullet$ функтор $\mathrm{Hom}(-, D_3)$, получаем точную последовательность $0 \to \mathrm{Hom}(C_3, D_3) \to \mathrm{Hom}(C_2, D_3) \to \mathrm{Hom}(C_1, D_3)$, из которой следует, что ϕ''' поднимается единственным способом до $\phi'''' : C_3 \to D_3$. Второе утверждение доказывается аналогично. $\square$

Лемма 19.2. *Пусть $0 \to A_1 \xrightarrow{a_1} A_2 \xrightarrow{a_2} A_3 \to 0$ и $0 \to B_1 \xrightarrow{b_1} B_2 \xrightarrow{b_2} B_3 \to 0$ — две монады, а E и F — их когомологии. Если выполнено условие $\mathrm{Ext}^q(A_i, B_j) = 0$ при $i > j$ и всех q, то всякий гомоморфизм из E в F индуцируется единственным гомоморфизмом монад.*

Доказательство: Воспользуемся точными последовательностями:

$$\begin{array}{ll} 0 \to \mathrm{Ker}\, a_2 \to A_2 \to A_3 \to 0, & 0 \to A_1 \to \mathrm{Ker}\, a_2 \to E \to 0, \\ 0 \to \mathrm{Ker}\, b_2 \to B_2 \to B_3 \to 0, & 0 \to B_1 \to \mathrm{Ker}\, b_2 \to F \to 0, \end{array}$$

Применяя к первой из них функтор $\mathrm{Hom}(-, B_1)$ сразу получаем изоморфизмы $\mathrm{Hom}(\mathrm{Ker}\, a_2, B_1) = \mathrm{Ext}^1(\mathrm{Ker}\, a_2, B_1) = 0$. Пусть теперь $\phi \in \mathrm{Hom}(E, F)$. Применяя к правому столбцу предыдущую лемму, получаем $\phi' : \mathrm{Ker}\, a_2 \to \mathrm{Ker}\, b_2$ и $\phi'' : A_1 \to B_1$. Применяя теперь ту же лемму к левому столбцу (и учитывая, что $\mathrm{Hom}(A_3, B_2) = \mathrm{Ext}^1(A_3, B_2) = 0$), получаем $\phi''' : A_2 \to B_2$ и $\phi'''' : A_3 \to B_3$. Ясно, что морфизмы ϕ'', ϕ''' и ϕ'''' задают морфизм монад $A_\bullet \to B_\bullet$. $\square$

Другой споcоб доказать лемму такой:

Упражнение 19.3. Пусть $A_\bullet$ и $B_\bullet$ — две монады. Постройте спектральную последовательность $E_1^{p,q} = \oplus_{j-i=p} \operatorname{Ext}^q(A_i, B_j) \Longrightarrow E^n = \operatorname{Ext}^n(E, F)$. В частности, если $\operatorname{Ext}^{>0}(A_i, B_j) = 0$, то $\operatorname{Ext}^q(E, F)$ вычисляются комплексом $0 \to \oplus_i \operatorname{Hom}(A_i, B_i) \to \operatorname{Hom}(A_1, B_2) \oplus \operatorname{Hom}(A_2, B_3) \to \operatorname{Hom}(A_3, B_3) \to 0$.

Это утверждение является частным случаем следующего

Упражнение 19.4. Пусть $A^\bullet$ и $B^\bullet$ — два комплекса. Постройте две спектральные последовательности, сходящиеся к одному и тому же, и начинающиеся с членов $E_1^{p,q} = \oplus_{j-i=p} \operatorname{Ext}^q(A^i, B^j)$ и $E_2^{p,q} = \oplus_{j-i=p} \operatorname{Ext}^q(H^i(A^\bullet), H^j(B^\bullet))$.

Отсюда легко следует единственность монады, представляющей расслоение.

Лемма 19.5. *Пусть $0 \to H_1 \otimes \mathcal{O}(-1) \to K_1 \otimes \mathcal{O} \to H_1' \otimes \mathcal{O}(1) \to 0$ — монада, когомология которой изоморфна когомологии монады $(*)$. Тогда сами монады тоже изоморфны.*

Доказательство: Пусть E и E_1 — когомологии монад, а $f : E \to E_1$ и $g : E_1 \to E$ — взаимно обратные изоморфизмы. Легко видеть, что наши монады удовлетворяют условиям леммы 19.2. Поэтому морфизмы f и g поднимаются до морфизмов монад. При этом ясно, что морфизмы $f \circ g$ и $g \circ f$ индуцируют тождественные автоморфизмы расслоений E и E_1. Так как каждая из наших монад в паре с собой тоже удовлетворяет условиям леммы 19.2, то $f \circ g$ и $g \circ f$ — тождественные автоморфизмы, значит монады изоморфны. $\square$

Это же рассуждение позволяет установить дополнительную симметрию монады $(*)$. Так как $r(E) = 2$ и $c_1(E) = 0$, то $E \cong E^*$. С другой стороны, ясно, что E^* является когомологией двойственной монады:

$$0 \to {H'}^* \otimes \mathcal{O}(-1) \to K^* \otimes \mathcal{O} \to H^* \otimes \mathcal{O}(1) \to 0.$$

Так как эта монада в паре с монадой $(*)$ удовлетворяет условиям леммы 19.2, то возникают изоморфизмы $f : H \to {H'}^*$, $g : K \to K^*$ и $h : H' \to H^*$, такие что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H \otimes \mathcal{O}(-1) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & K \otimes \mathcal{O} \arrow[r, "b"] \arrow[d, "g"'] & H' \otimes \mathcal{O}(1) \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & {H'}^* \otimes \mathcal{O}(-1) \arrow[r, "b^*"] & K^* \otimes \mathcal{O} \arrow[r, "a^*"] & H^* \otimes \mathcal{O}(1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

коммутативна, а на когомологиях индуцируется изоморфизм $\sigma : E \to E^*$. Рассмотрим сопряженную диаграмму.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H \otimes \mathcal{O}(-1) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "h^*"'] & K \otimes \mathcal{O} \arrow[r, "b"] \arrow[d, "g^*"'] & H' \otimes \mathcal{O}(1) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & {H'}^* \otimes \mathcal{O}(-1) \arrow[r, "b^*"] & K^* \otimes \mathcal{O} \arrow[r, "a^*"] & H^* \otimes \mathcal{O}(1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ясно, что этот морфизм монад индуцирует морфизм $\sigma^* : E \to E^*$ на когомологиях. Но σ — кососимметричен (так как возникает из изоморфизма $\Lambda^2 E \cong \mathcal{O}$), поэтому $\sigma^* = -\sigma$. Опять пользуясь леммой 19.2, получаем $h^* = -f$, $g^* = -g$ и $f^* = -h$ (последнее, впрочем, следует из первого). Отождествляя H' с H^* посредством морфизма h, получаем

Теорема 19.6. *Пусть E — стабильное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$ с $c_1(E) = 0$, $c_2(E) = m$. Пусть $H = \mathbb{C}^m$ и $K = \mathbb{C}^{2m+2}$ с симплектической* *формой Q, задаваемой изоморфизмом $q : K \to K^*$. Тогда существует тензор $a \in H^* \otimes K \otimes V^*$, т.ч. E является когомологией самодвойственной монады*

$$0 \longrightarrow H \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{a} K \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{a^* \circ q} H^* \otimes \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0. \qquad (\dagger)$$

Тензор a единственнен с точностью до действия группы $G = \mathrm{GL}(H) \times \mathrm{SP}(K)$.

Упражнение 19.7. Покажите, что если когомология монады $(\dagger)$ стабильна, то стабилизатор тензора a в группе G равен $\{(\mathrm{id}_H, \mathrm{id}_K), (-\mathrm{id}_H, -\mathrm{id}_K)\}$.

Упражнение 19.8. Покажите, что последовательность $(\dagger)$, построенная по тензору $a \in H^* \otimes K \otimes V^*$, является монадой, а ее когомология — стабильным расслоением ранга 2, т.т.т.к. выполняются условия

(a) $\forall 0 \neq v \in V$ морфизм $a(v) \in H^* \otimes K = \mathrm{Hom}(H, K)$ — вложение;
(b) отображение $a(v)^* \circ q \circ a(v) = Q(a(v), a(v)) = 0$ для всех $v \in V$;
(c) отображение $V \otimes H \to K$, индуцированное тензором a сюрьективно.

Обозначим через $\mathcal{A} = \mathcal{A}(2; 0, m) \subset H^* \otimes K \otimes V^*$ множество тензоров, удовлетворяющих приведенным выше условиям (a), (b) и (c), а через G' — группу $G/\{(\mathrm{id}_H, \mathrm{id}_K), (-\mathrm{id}_H, -\mathrm{id}_K)\}$. Мы уже доказали, что множество классов изоморфизма стабильных расслоений ранга 2 с $\mathrm{c}_1 = 0$, $\mathrm{c}_2 = m$ находится в биекции с множеством $\mathcal{A}(2; 0, m)/G'$.

Теорема 19.9. *Многообразие $\mathcal{A}/G'$ гладко, $\dim \mathcal{A}/G' = 4m - 3$.*

Доказательство: Проверим вначале, что $\mathcal{A}$ — гладко. Ясно, что условия (a) и (c) — открытые, поэтому достаточно проверить, что условие (b) накладывает гладкое ограничение, то есть что в любой точке $a \in \mathcal{A}$ дифференциал отображения $f : \mathcal{A} \to \Lambda^2 H^* \otimes S^2 V^*$, $a \mapsto a^* \circ q \circ a = Q(a, a)$ сюрьективен. Ясно, что $d_a f : H^* \otimes K^* \otimes V^* \to \Lambda^2 H^* \otimes S^2 V^*$, $\alpha \mapsto \alpha^* \circ q \circ a + a^* \circ q \circ \alpha$. Рассмотрим отображение $D_a(\alpha, \beta) = \beta \circ a + (a^* \circ q) \circ \alpha$, где $\alpha \in H^* \otimes K \otimes V^* = \mathrm{Hom}(H \otimes \mathcal{O}(-1), K \otimes \mathcal{O})$, $\beta \in H^* \otimes K^* \otimes V^* = \mathrm{Hom}(K \otimes \mathcal{O}, H^* \otimes \mathcal{O}(1))$. Ясно, что D_a совпадает с дифференциалом $d_1^{1,0}$ из спектральной последоватльности упражнения 19.3, значит $\mathrm{Coker}\, D_a = \mathrm{Ext}^2(E, E)$, где E — когомология монады $(\dagger)$. Но по двойственности Серра $\mathrm{Ext}^2(E, E) \cong \mathrm{Hom}(E, E(-3))^* = 0$ так как E стабильно. Значит D_a сюрьективно. Но

$$d_a(\alpha + (\beta \circ q^{-1})^*) = \alpha^* \circ q \circ a + a^* \circ q \circ \alpha + \beta \circ a - a^* \circ \beta^* = D_a(\alpha, \beta) - D_a(\alpha, \beta)^*.$$

Так как $\Lambda^2 H^* \otimes S^2 V^*$ кососимметрично, получаем сюрьективность $d_a f$. Таким образом $\mathcal{A}$ гладко, причем $\dim \mathcal{A} = \dim(H^* \otimes K^* \otimes V^*) - \dim(\Lambda^2 H^* \otimes S^2 V^*) = 3m(2m+2) - 3m(m-1) = 3m(m+3)$. Так как действие группы G' на $\mathcal{A}$ свободно, то $\mathcal{A}/G'$ гладко и $\dim \mathcal{A}/G' = \dim \mathcal{A} - \dim G' = 3m^2 + 9m - m^2 - (m+1)(2m+3) = 4m - 3$. $\square$

Так же как и в начале семестра мы определим функтор $\mathbf{M} = \mathbf{M}(2; 0, m) : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$, сопоставляя схеме S множество классов эквивалентности расслоений $\mathcal{E}$ ранга 2 на $S \times \mathbb{P}^2$, таких что $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_{|\{s\} \times \mathbb{P}^2}$ стабильно для всех $s \in S$ и $\mathrm{c}_1(\mathcal{E}_s) = 0$, $\mathrm{c}_2(\mathcal{E}_s) = m$, где отношение эквивалентности задается подкруткой на линейные расслоения, поднятые с S.

Теорема 19.10. *Многообразие $M = M(2; 0, m) := \mathcal{A}(2; 0, m)/G'$ копредставляет функтор $\mathbf{M}(2; 0, m)$, то есть является грубым многообразием модулей стабильных расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^2$ с $\mathrm{c}_1 = 0$, $\mathrm{c}_2 = m$.*

Доказательство: Нам надо построить морфизм функторов $\mathbf{M} \to P_M$ и проверить, что он универсален. Пусть $\mathcal{E}$ — расслоение на $S\times\mathbb{P}^2$, соответствующее точке в $\mathbf{M}(S)$. Нам надо построить по нему морфизм $S \to M$. Для этого нам понадобится относительная спектральная последовательность Бейлинсона.

Упражнение 19.11. Рассмотрим диагональ $\Delta : S \times \mathbb{P}^n \to S \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ и проекции $p, q : S \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \to S \times \mathbb{P}^n$. Пусть $\pi : S \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ и $\rho : S \times \mathbb{P}^n \to S$ — проекции. **(1)** Постройте резольвенту пучка $\Delta_*\mathcal{O}_{S\times\mathbb{P}^n}$ на $S \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ из пучков $p^*\pi^*\mathcal{O}(-p) \otimes q^*\pi^*\Omega^p(p)$. **(2)** Постройте спектральную последовательности $E_1^{p,q} = \rho^*R^q\rho_*(F \otimes \pi^*\mathcal{O}(p)) \otimes \pi^*\Omega^{-p}(-p) \Longrightarrow E^0 = F$, $E^{\neq 0} = 0$ $(-n \le p \le 0)$ и $E_1^{p,q} = \rho^*R^q\rho_*(F \otimes \pi^*\Omega^{-p}(-p)) \otimes \pi^*\mathcal{O}(p) \Longrightarrow E^0 = F$, $E^{\neq 0} = 0$ $(-n \le p \le 0)$. **(3)** Докажите, что расслоение $\mathcal{E}$ является когомологией монады

$$0 \longrightarrow \rho^*\mathcal{H} \otimes \pi^*\mathcal{O}(-1) \xrightarrow{A} \rho^*\mathcal{K} \otimes \pi^*\mathcal{O} \xrightarrow{B} \rho^*\mathcal{H}' \otimes \pi^*\mathcal{O}(1) \longrightarrow 0,$$

где $\mathcal{H} = R^1\rho_*(\mathcal{E} \otimes \pi^*\mathcal{O}(-2))$, $\mathcal{K} = R^1\rho_*(\mathcal{E} \otimes \pi^*\Omega^1)$, $\mathcal{H}' = R^1\rho_*(\mathcal{E} \otimes \pi^*\mathcal{O}(-1))$. **(4)** Докажите, что расслоение $\mathcal{E}$ является когомологией монады

$$0 \longrightarrow \rho^*\mathcal{H} \otimes \pi^*\mathcal{O}(-1) \xrightarrow{A} \rho^*\mathcal{K} \otimes \pi^*\mathcal{O} \xrightarrow{A^*\circ q} \rho^*(\mathcal{H}^* \otimes \mathcal{L}) \otimes \pi^*\mathcal{O}(1) \longrightarrow 0,$$

где $\mathcal{L} = \rho_*(\det \mathcal{E})$ и $q : \mathcal{K} \to \mathcal{K}^* \otimes \mathcal{L}$ — кососимметричный изоморфизм.

Пусть $A \in \Gamma(S, \mathcal{H}^* \otimes \mathcal{K}) \otimes V^*$ — тензор, задающий монаду расслоения $\mathcal{E}$. Для каждой точки $s \in S$ возьмем ее окрестность $U \subset S$, над которой расслоения $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ тривиализуются, выберем их тривиализации $\mathcal{H}_{|U} \cong H \otimes \mathcal{O}_U$, $\mathcal{K}_{|U} \cong K \otimes \mathcal{O}_U$ и $\mathcal{L}_{|U} \cong \mathcal{O}_U$ и рассмотрим отображение $U \to \mathcal{A}$, $x \mapsto A(x) \in H^* \otimes K \otimes V^*$. Ясно, что эти отображения склеиваются в отображение $S \to \mathcal{A}/G' = M$. Заметим, что при подкрутке расслоения $\mathcal{E}$ на линейное расслоение, поднятое с S, монада подкручивается на это же расслоение, но A не меняется, поэтому мы получаем отображение $\mathbf{M}(S) \to P_M(S)$. Оно очевидно функториально по S, то есть дает морфизм функторов $\mathbf{M} \to P_M$.

Покажем, что этот морфизм универсален. Пусть $\mathbf{M} \to P_X$ — произвольный морфизм функторов. Нам надо построить морфизм $P_M \to P_X$, то есть отображение $M \to X$. Рассмотрим на $\mathcal{A} \times \mathbb{P}^2$ универсальную монаду

$$0 \longrightarrow H \otimes \pi^*\mathcal{O}(-1) \xrightarrow{A} K \otimes \pi^*\mathcal{O} \xrightarrow{A^*\circ q} H^* \otimes \pi^*\mathcal{O}(1) \longrightarrow 0, \qquad (\ddagger)$$

полагая $A(a) = a$. Ее когомология $\mathcal{E}$ лежит в $\mathbf{M}(\mathcal{A})$, поэтому морфизм функторов $\mathbf{M} \to P_X$ дает нам элемент в $P_X(\mathcal{A}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, X)$, то есть отображение $\mathcal{A} \to X$. Далее, ясно, что задавая на пространствах H и K естественные действия группы $G = \mathrm{GL}(H) \times \mathrm{SP}(K)$, получаем G-эквивариантную структуру на монаде $(\ddagger)$, которая индуцирует G-эквивариантную структуру на ее когомологии $\mathcal{E}$. Значит $g^*\mathcal{E} \cong \mathcal{E}$, то есть построенный морфизм $\mathcal{A} \to X$ инвариантен относительно G и, следовательно, пропускается через $\mathcal{A}/G = \mathcal{A}/G' = M$. По построению видно, что композиция $\mathbf{M} \to P_M \to P_X$ совпадает с морфизмом $\mathbf{M} \to P_X$. $\square$

Теорема 19.12. *Если m нечетно, то $M = \mathcal{A}/G'$ является тонким многообразием модулей.*

Доказательство: Ясно, что нам достаточно построить на $M \times \mathbb{P}^2$ универсальное расслоение, а для этого достаточно на $M \times \mathbb{P}^2$ построить универсальную монаду. Естественный способ — попытаться проверить, что монада $(\ddagger)$

на $\mathcal{A}\times\mathbb{P}^2$ опускается на $M\times\mathbb{P}^2$. Так как $M=\mathcal{A}/G'$, для этого достаточно построить G'-эквивариантную структуру на (‡). Действие группы G, построенное выше, не годится, так как элемент $(-\mathrm{id}_H,-\mathrm{id}_K)$ действует умножением на (-1). Сделаем так, подберем линейное представление L группы G, на котором этот элемент тоже действует умножением на (-1) и подкрутим монаду (‡) на L. На ней появится G'-эквивариантная структура, которая позволит опустить монаду на $M\times\mathbb{P}^2$. В качестве L можно взять $\det H$. □

Упражнение 19.13. Покажите, что если m четно, то на всяком линейном представлении группы G элемент $(-\mathrm{id}_H,-\mathrm{id}_K)$ действует тождественно.

Поэтому, многообразие модулей $M(2;0,m)$ при четном m не является тонким (вообще говоря, это не доказательство, а объяснение; доказательство требует более тонкого анализа).

В заключение объясним, как строить многообразие модулей расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^2$ с нечетным c_1.

Упражнение 19.14. Докажите, что если E — стабильное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^2$ с $\mathrm{c}_1(E)=-1$, $\mathrm{c}_2(E)=m$, то E является когомологией монады

$$0\longrightarrow H\otimes\mathcal{O}(-1)\xrightarrow{\ a\ }K\otimes\Omega^1(1)\xrightarrow{\ b\ }H'\otimes\mathcal{O}\longrightarrow 0,$$

где $\dim H=\dim H'=m-1$, $\dim K=m$.

Упражнение 19.15. Докажите, что если E — стабильное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^2=\mathbb{P}(V)$ с $\mathrm{c}_1(E)=-1$, $\mathrm{c}_2(E)=m$, то E является когомологией монады

$$0\longrightarrow H\otimes\mathcal{O}(-1)\xrightarrow{\qquad a\qquad}K\otimes\Omega^1(1)\xrightarrow{a^*\circ(q\otimes\tau)}H^*\otimes\mathcal{O}\longrightarrow 0,$$

где $q:K\to K^*$ — симметричный изоморфизм, $\tau:\Omega^1(1)\to T(-2)$ — антисимметричный изоморфизм, а $a\in H^*\otimes K\otimes V$ — тензор, такой что

(a1) $\forall 0\ne h\in H$ морфизм $a(h)\in K\otimes V=\mathrm{Hom}(V^*,K)$ имеет ранг ≥ 2;

(b1) отображение $a(\xi_1)^*\circ q\circ a(\xi_2)-a(\xi_2)^*\circ q\circ a(\xi_1)=0$ для всех $\xi_1,\xi_2\in V^*$.

и a определен однозначно с точностью до действия группы $G=\mathrm{GL}(H)\times\mathrm{O}(K)$.

Пусть $\mathcal{A}=\mathcal{A}(2;-1,m)\subset H^*\otimes K\otimes V$ — множество тензоров, удовлетворяющих условиям (a1) и (b1).

Упражнение 19.16. Докажите, что стабилизатор всякой точки $a\in\mathcal{A}$ в группе G состоит из элементов $(\mathrm{id}_H,\mathrm{id}_K)$ и $(-\mathrm{id}_H,-\mathrm{id}_K)$, так что группа $G'=G/\{(\mathrm{id}_H,\mathrm{id}_K),(-\mathrm{id}_H,-\mathrm{id}_K)\}$ действует на $\mathcal{A}$ свободно.

Упражнение 19.17. Докажите, что $\mathcal{A}/G'$ гладко и $\dim\mathcal{A}/G'=4m-4$.

Упражнение 19.18. Докажите, что $M(2;-1,m):=\mathcal{A}(2;-1,m)/G'$ является грубым многообразием модулей стабильных расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^2$ с классами Чженя $\mathrm{c}_1(E)=-1$, $\mathrm{c}_2(E)=m$.

Упражнение 19.19. **(1)** Постройте на $\mathcal{A}\times\mathbb{P}^2$ универсальную монаду с G-эквивариантной структурой. **(2)** Покажите, что если m четно (нечетно), то на $\det K$ (соотв. $\det H$) элемент $(-\mathrm{id}_H,-\mathrm{id}_K)$ действует умножением на (-1). **(3)** Докажите, что при всех m многообразие $M(2;-1,m)$ является тонким многообразием модулей.