20. Неприводимость многообразия модулей расслоений на $\mathbb{P}^2$.

На прошлой лекции мы показали, что описание стабильных расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$ с $c_1 = 0$ и $c_2 = m$ в виде когомологий самодвойственных монад

$$0 \longrightarrow H \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{a} K \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{a^* \circ q} H^* \otimes \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0$$

приводит к описанию многообразия модулей: $M(2;0,m) \cong \mathcal{A}(2;0,m)/G_0$, где $\mathcal{A}(2;0,m) \subset H^* \otimes K \otimes V^*$ и $G_0 = \mathrm{GL}(H) \times \mathrm{SP}(K)/\{\pm 1\}$. В принципе, сведение обычных монад к самодвойственным совершенно не обязательно. Для доказательства неприводимости удобнее воспользоваться другим описанием.

Из того, что всякое стабильное расслоение ранга 2 с $c_1 = 0$ и $c_2 = m$ является когомологией монады

$$0 \longrightarrow H \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{a} K \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{b} H^* \otimes \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0, \qquad (*)$$

можно вывести, что $M(2;0,m) \cong \mathcal{A}'/G_0'$, где $\mathcal{A}'$ — множество всех $(a,b) \in H^* \otimes K \otimes V^* \oplus K^* \otimes H^* \otimes V^*$, удовлетворяющих условиям

- (a$'$) $\forall 0 \neq v \in V$ морфизм $a(v) \in H^* \otimes K = \mathrm{Hom}(H,K)$ — вложение, а морфизм $b(v) \in K^* \otimes H^* = \mathrm{Hom}(K,H^*)$ — сюръекция;
- (b$'$) отображение $b(v) \circ a(v) = 0$ для всех $v \in V$;
- (c$'$) отображение $K \to H^* \otimes V^*$, индуцированное тензором b инъективно;

по свободному действию группы $G_0' = (\mathrm{GL}(H) \times \mathrm{GL}(K) \times \mathrm{GL}(H^*))/\mathbb{C}^*$.

Упражнение 20.1. Докажите, что вложение $\mathcal{A}(2;0,m) \to \mathcal{A}'(2;0,m)$, при котором $a \mapsto (a, a^* \circ q)$ индуцирует изоморфизм $\mathcal{A}(2;0,m)/G_0 \to \mathcal{A}'(2;0,m)/G_0'$.

В этом описании удобно отфакторизофать по действию группы $\mathrm{GL}(K)$. Для этого рассмотрим отображение $\mathcal{A}' \to \mathrm{Hom}(V \otimes V, H^* \otimes H^*)$, $(a,b) \mapsto \gamma_{a,b}$, где $\gamma_{a,b}(v \otimes w) = b(w) \circ a(v)$.

Лемма 20.2. *Образ построенного отображения лежит в* $\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, H^* \otimes H^*)$, *и состоит из всех* $\gamma \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, H^* \otimes H^*)$, *таких что*

- (a$''$) $\forall 0 \neq v \in V$ *морфизм* $\gamma_v : H \to H^* \otimes V^*$ *— вложение;*
- (b$''$) $\forall 0 \neq v \in V$ *морфизм* $\gamma_v' : V \otimes H \to H^*$ *— сюръекция;*
- (c$''$) *ранг отображения* $\hat{\gamma} : V \otimes H \to H^* \otimes V^*$ *равен* $2m+2$*;*

а слои — орбиты действия группы $\mathrm{GL}(K) \subset G_0'$.

Доказательство: Заметим, что $\gamma_{a,b}(v \otimes v) = b(v) \circ a(v) = 0$. Так как тензоры $v \otimes v$ порождают $S^2 V$, заключаем, что $\gamma_{a,b}$ лежит в $\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, H^* \otimes H^*)$. То, что $\gamma_{a,b}$ удовлетворяет условиям (a$''$)–(c$''$), а отображение $\mathrm{GL}(K)$-эквивариантно, очевидно. Покажем как по γ построить a и b. Выберем изоморфизм $K \cong \mathrm{Im}\,\hat{\gamma}$ и получим $a : V \otimes H \to K$, $b : K \to H^* \otimes V^*$. Выполнение условий (a$'$)–(c$'$) очевидно. Кроме того, ясно что произвол в выборе a и b состоит в выборе изоморфизма $K \cong \mathrm{Im}\,\hat{\gamma}$, поэтому слои — орбиты группы $\mathrm{GL}(K)$. $\square$

Определение. Отображение $\gamma \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, H^* \otimes H^*)$, удовлетворяющее условиям (a$''$)–(c$''$), называется стабильным кронекеровым модулем.

Множество всех стабильных кронекеровых модулей обозначим $\mathcal{C} = \mathcal{C}_m$.

Следствие 20.3. *Многообразие модулей* $M(2;0,m)$ *изоморфно фактору* $\mathcal{C}_m/G_0''$ *по свободному действию группы* $G_0'' = (\mathrm{GL}(H) \times \mathrm{GL}(H^*))/\mathbb{C}^*$.

Важность кронекеровых модулей демонстрируется следующей леммой.

Лемма 20.4. *Пусть E — расслоение на $\mathbb{P}^2$, соответствующее стабильному кронекеровому модулю $\gamma \in \mathcal{C}_m$, $L \subset \mathbb{P}^2$ — прямая, и $v \neq w \in L$. Положим $k = m - \mathrm{rang}(\gamma(v \wedge w) : H \to H^*)$. Тогда $E_{|L} \cong \mathcal{O}(k) \oplus \mathcal{O}(-k)$.*

Доказательство: Рассмотрим подкрученное на $\mathcal{O}(-1)$ ограничение на L монады $(*)$, соответствующей расслоению E,

$$0 \longrightarrow H \otimes \mathcal{O}_L(-2) \xrightarrow{a} K \otimes \mathcal{O}_L(-1) \xrightarrow{b} H^* \otimes \mathcal{O}_L \longrightarrow 0,$$

и используем ее для вычисления $H^n(E(-1)_{|L})$. К этим когомологиям сходится спектральная последовательность, второй член которой — когомологии членов подкрученного ограничения монады. Он имеет вид

$$E_2^{\bullet,\bullet} = \left\{ \begin{tikzcd}[row sep=small] H \arrow[drr, "d_2"] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H^* \end{tikzcd} \right\}$$

Отсюда видно, что $\dim H^0(E(-1)_{|L}) = \dim H^1(E(-1)_{|L}) = m - \mathrm{rang}(d_2)$, так что осталось связать d_2 и $\gamma_{a,b}(v \wedge w)$. Для этого рассмотрим L как подпространство в V, так что v, w — его базис, и пусть x, y — двойственный базис в L^*. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H \otimes \mathcal{O}_L(-2) \arrow[r, "\binom{x}{y}"] \arrow[d, equal] & (H \oplus H) \otimes \mathcal{O}_L(-1) \arrow[r, "{(y,-x)}"] \arrow[d, "{(a(v),a(w))}"] & H \otimes \mathcal{O}_L \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{a,b}(v\wedge w)"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H \otimes \mathcal{O}_L(-2) \arrow[r, "a"] & K \otimes \mathcal{O}_L(-1) \arrow[r, "b"] & H^* \otimes \mathcal{O}_L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Коммутативность первого квадрата (т.е. $a = a(v)x + a(w)y$) очевидна, так как $v \otimes x + w \otimes y = \mathrm{id}_L$. Коммутатвиность второго доказывается аналогично: $b \circ (a(v), a(w)) = (b(v)x + b(w)y) \circ (a(v), a(w)) = (b(w) \circ a(v)y, b(v) \circ a(w)x) = \gamma_{a,b}(v \wedge w)(y, -x)$. Мы воспользовались тем, что $b(v) \circ a(v) = b(w) \circ a(w) = 0$ и $b(w) \circ a(v) = -b(v) \circ a(w) = \gamma_{a,b}(v \wedge w)$. В силу функториальности спектральной последовательности, получаем коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "d_2'"] \arrow[d, equal] & H \arrow[d, "\gamma_{a,b}(v\wedge w)"] \\ H \arrow[r, "d_2"] & H^* \end{tikzcd}$$

где d_2' — второй дифференциал из спектральной последовательности, построенной по верхней строке нашей диаграммы. Так как верхняя строка точна, эта спектральная последовательность сходится к нулю, поэтому d_2' — изоморфизм, значит $\mathrm{rang}(d_2) = \mathrm{rang}(\gamma_{a,b}(v \wedge w))$. $\square$

Обозначим через $\mathcal{C}^L \subset \mathcal{C}$ — множество всех стабильных кронекеровых модулей γ, для которых ранг $\gamma(\Lambda^2 L) = m$. Ясно, что это открытое G_0''-инвариантное подмножество в $\mathcal{C}$, а фактор $M^L := \mathcal{C}^L/G_0'' \subset \mathcal{C}/G_0''$ — открытое подмножество всех стабильных расслоений E, для которых $E_{|L} \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$.

Упражнение 20.5. Покажите, что множества M^L для разных L составляют покрытие многообразия M, причем $M^{L_1} \cap M^{L_2} \neq \emptyset$ для всех L_1 и L_2.

Поэтому, для проверки неприводимости многообразия $M(2;0,m)$ достаточно убедиться в неприводимости многообразия $\mathcal{C}^L$. Выберем базис v_1, v_2, v_3 в V и пусть $L = \langle v_1, v_2\rangle$. Тогда γ запишется в виде матрицы

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ -\gamma_{12} & 0 & \gamma_{23} \\ -\gamma_{13} & -\gamma_{23} & 0 \end{pmatrix}, \tag{$\dagger$}$$

где $\gamma_{ij} = \gamma(v_i \wedge v_j) \in \mathrm{Hom}(H, H^*)$. Ясно, что $\mathcal{C}^L$ можно описать как множество всех таких троек $(\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23})$, для которых выполняются условия (a$''$)–(c$''$) и γ_{12} — изоморфизм. Поскольку нас интересует неприводимость, а условия (a$''$) и (b$''$) очевидно открытые, мы можем (и будем!) их игнорировать. Остается только ранговое условие на матрицу ($\dagger$). Прежде чем его переформулировать, произведем дополнительную редукцию. Рассмотрим отображение $\mathcal{C}^L \to \mathrm{Iso}(H, H^*)$, $\gamma \mapsto \gamma_{12}$. Ясно, что оно $\mathrm{GL}(H^*)$-эквивариантно. Но действие группы $\mathrm{GL}(H^*)$ на множестве $\mathrm{Iso}(H, H^*)$ транзитивно и свободно, поэтому достаточно проверить неприводимость слоя над какой-либо точкой.

Лемма 20.6. *Слой отображения $\mathbb{C}^L \to \mathrm{Iso}(H, H^*)$ равен (открытому подмножеству в) $\{(A, B) \in \mathrm{End}(H) \oplus \mathrm{End}(H) \mid r([A, B]) = 2\}$.*

Доказательство: Опишем слой над точкой $\gamma_{12} \in \mathrm{Iso}(H, H^*)$. Отождествим H с H^* посредством γ_{12}. Тогда матрица ($\dagger$) примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_H & A \\ -\mathrm{id}_H & 0 & B \\ -A & -B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_H & \gamma_{13}\gamma_{12}^{-1} \\ -\mathrm{id}_H & 0 & \gamma_{23}\gamma_{12}^{-1} \\ -\gamma_{13}\gamma_{12}^{-1} & -\gamma_{23}\gamma_{12}^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{$\ddagger$}$$

Чтобы вычислить ранг этой матрицы, произведем элементарные преобразования столбцов, прибавляя к последнему столбцу первый, умноженный (слева) на B, и второй, умноженный (слева) на $-A$. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_H & 0 \\ -\mathrm{id}_H & 0 & 0 \\ -A & -B & -[A, B] \end{pmatrix}.$$

Ее ранг очевидно равен $2m + r([A, B])$ и лемма доказана. $\square$

Таким образом, неприводимость многообразия модулей следует из

Теорема 20.7 (Хулек). *Множество $F_r = \{(A, B) \mid r([A, B]) = r\}$ неприводимо для любого $r \geq 2$.*

Этим мы и займемся. Напомним, что оператор A называется регулярным, если $\dim Z_A = m$, где $Z_A = \{C \in \mathrm{End}(H) \mid [A, C] = 0\}$ — его централизатор. Известно, что множество регулярных операторов открыто и плотно в $\mathrm{End}(H)$.

Лемма 20.8. *Множество F_r° пар $(A, B) \in F_r$, таких что A регулярен, плотно (в классической топологии) в F_r.*

Доказательство: Пусть $(A, B) \in F_r$. Найдем регулярный оператор A_0 в Z_B (его легко построить, воспользовавшись теоремой о жордановой нормальной форме) и рассмотрим прямую $\{(A + tA_0, B)\} \subset F_r$. Так как свойство регулярности открыто (по Зарискому), найдется сколь угодно малое t, такое что $A + tA_0$ регулярен, поэтому $(A + tA_0, B) \in F_r^\circ$. $\square$

Согласно лемме достаточно проверить неприводимость множества F_r°. А для этого достаточно проверить связность множества $F_r' = F_r^\circ \setminus \mathrm{Sing}(F_r^\circ)$ (если

$F_r^\circ = Z_1 \cup Z_2$ — объединение компонент, то $Z_1 \cap Z_2 \subset \mathrm{Sing}(F_r^\circ)$, поэтому $Z_1 \setminus \mathrm{Sing}(F_r^\circ)$ и $Z_2 \setminus \mathrm{Sing}(F_r^\circ)$ — непересекающиеся замкнутые подмножества в F_r', объединение которых равно F_r'). Рассмотрим проекцию $p : F_r' \to \mathrm{End}(H)$, $(A, B) \mapsto A$. Легко видеть, что ее образ содержит открытое множество, и значит связен.

Упражнение 20.9. Покажите, что образ p содержит множество всех операторов, все собственные значения которых различны.

С другой стороны, в окрестности каждой точки $(A, B) \in F_r'$ множество F_r' задается $(m-r)^2$ уравнениями (выберем базис пространства H, в котором коммутатор $[A, B] = I_r$, где I_r — стандартная матрица ранга r), тогда F_r' задается занулением окаймляющих миноров размера $(r+1) \times (r+1)$, которых ровно $(m-r)^2$ штук). Значит размерность многообразия F_r' в окрестности всякой точки не меньше чем $2m^2 - (m-r)^2$. Поэтому в силу следующей леммы достаточно проверить, что все слои морфизма p связны и имеют размерность $2m^2 - (m-r)^2 - m^2 = 2mr - r^2$.

Лемма 20.10. *Пусть $p : X \to Y$ морфизм, причем размерность X в окрестности всякой точки $\ge d$, Y связное, и все слои морфизма p связные размерности $\le d - \dim Y$. Тогда X связно.*

Доказательство: Пусть $X = X_1 \sqcup X_2$ — объединение компонент связности. Если $p(X_i)$ содержится в замкнутом подмножестве в Y, то размерность общего слоя X_i над Y строго больше чем $\dim X_i - \dim Y$, что противоречит условию. Так как $p(X_i)$ конструктивно в Y, то оно содержит открытое подмножество Y. Следовательно $p(X_1)$ и $p(X_2)$ имеют непустое пересечение (так как Y связно). Но тогда слой над точкой пересечения образов несвязен, что также противоречит условиям. □

Обозначим $F_A = \{B \mid r([A, B]) = r\} = p^{-1}(A)$ — слой над регулярным оператором A.

Лемма 20.11. *Морфизм $F_A \to \mathrm{End}(H)$, $B \mapsto [A, B]$ является m-мерным векторным расслоением над $C_A = \{D \in \mathrm{End}(H) \mid r(D) = r,\ \mathsf{Tr}(D \cdot Z_A) = 0\}$.*

Доказательство: Заметим, что если $D = [A, B]$ и $C \in Z_A$, то $\mathsf{Tr}(D \cdot C) = \mathsf{Tr}(ABC) - \mathsf{Tr}(BAC) = \mathsf{Tr}(BCA) - \mathsf{Tr}(BAC) = \mathsf{Tr}(B[C, A]) = 0$, поэтому образ морфизма лежит в C_A. Кроме того, морфизм линеен по B, а его ядро равно Z_A, поэтому образ — линейное подпространство коразмерности $\dim Z_A$. Но уравнения $\mathsf{Tr}(D \cdot Z_A)$ как раз задают подпространство коразмерности $\dim Z_A$, поэтому образ равен C_A. Наконец, A регулярен, поэтому $\dim Z_A = m$. □

Таким образом, остается установить неприводимость множества C_A. Оно является пересечением множества матриц ранга r с линейным подпространством. Рассмотрим отображение $\mathrm{GL}(H) \times \mathrm{GL}(H) \to \mathrm{End}(H)$, $(X, Y) \mapsto X I_r Y$, где I_r — стандартная матрица ранга r. Поскольку оно сюръективно, то достаточно изучить множество $\{(X, Y) \in \mathrm{GL}(H) \times \mathrm{GL}(H) \mid \mathsf{Tr}(X I_r Y Z_A) = 0\}$. Так как нас интересует неприводимость, можно отбросить открытое условие невырожденности матриц X и Y и доказывать неприводимость множества

$$C_A' = \{(X, Y) \in \mathrm{End}(H) \times \mathrm{End}(H) \mid \mathsf{Tr}(X I_r Y Z_A) = 0\}.$$

Выберем базис, в котором оператор A принимает жорданову нормальную форму, то есть A блочно диагональная с жордановыми клетками $A_1, \ldots, A_s$

на диагонали. Пусть $H = H_1 \oplus \dots \oplus H_s$ — соответствующее разложение пространства H, так что $A_i \in \mathrm{End}(H_i)$. Пусть $M_i = \mathrm{Hom}(H, H_i) \oplus \mathrm{Hom}(H_i, H)$, а $C'_i = \{(X,Y) \in M_i \mid \mathsf{Tr}(X I_r Y Z_{A_i}) = 0\}$.

Лемма 20.12. *Имеем* $C'_A = C'_1 \times C'_2 \times \dots \times C'_s$.

Доказательство: Ясно, что $\oplus Z_{A_i} \subset Z_A$, поэтому из регулярности оператора A вытекает равенство $\oplus Z_{A_i} = Z_A$ (размерность централизатора жордановой клетки равна ее размеру). Далее, если $(X,Y) \in \mathrm{End}(H) \times \mathrm{End}(H)$, то $X = \oplus X_i$, $Y = \oplus Y_i$, где $(X_i, Y_i) \in M_i$, причем $\mathsf{Tr}(X_i I_r Y_i Z_{A_j}) = 0$ при $i \neq j$. □

Итак, пусть $\dim H_i = t$, $(x_{ij}, y_{kl})_{1 \le i,l \le t,\ 1 \le j,k \le m}$ — естественные координаты в M_i. Тогда $A_i = \lambda E + D$, где $E = \mathrm{id}_{H_i}$, а D — жорданова клетка с собственным значением нуль, а $Z_{A_i} = \langle E, D, D^2, \dots, D^{t-1} \rangle$. Легко видеть, что отображение $f : M_i \to \mathbb{C}^t$, $(X,Y) \mapsto (\mathsf{Tr}(X I_r Y), \mathsf{Tr}(X I_r Y D), \dots, \mathsf{Tr}(X I_r Y D^{t-1}))$ в координатах принимает вид

$$f(x_{ij}, y_{kl}) = \left(\sum_{1 \le i \le t,\ 1 \le j \le r} x_{ij} y_{ji}, \sum_{2 \le i \le t,\ 1 \le j \le r} x_{ij} y_{j,i-1}, \dots, \sum_{1 \le j \le r} x_{tj} y_{j1} \right)$$

Обозначим $Q^r_{t,m} = f^{-1}(0)$.

Лемма 20.13. *Дифференциал* df *не сюръективен в тех и только в тех точках* $(x_{ij}, y_{kl}) \in M_i$, *в которых* $x_{t1} = \dots = x_{tr} = y_{11} = \dots = y_{r1} = 0$.

Доказательство: Для каждого $1 \le k \le r$ рассмотрим минор $(\partial f_p / \partial y_{kl})^t_{l=1}$:

$$\left(\frac{\partial f_p}{\partial y_{kl}} \right) = \begin{pmatrix} x_{1k} & x_{2k} & \dots & x_{t-1,k} & x_{tk} \\ x_{2k} & x_{3k} & \dots & x_{tk} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{t-1,k} & x_{tk} & \dots & 0 & 0 \\ x_{tk} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Аналогично, для каждого $1 \le j \le r$ рассмотрим минор $(\partial f_p / \partial x_{ij})^t_{i=1}$:

$$\left(\frac{\partial f_p}{\partial y_{kl}} \right) = \begin{pmatrix} y_{j1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y_{j2} & y_{j1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{j,t-1} & y_{j,t-2} & \dots & y_{j1} & 0 \\ y_{jt} & y_{j,t-1} & \dots & y_{j2} & y_{j1} \end{pmatrix}$$

Все остальные частные производные равны нулю. □

Лемма 20.14. $\mathrm{codim}_{M_i} Q^r_{t,m} = t$, $\mathrm{codim}_{Q^r_{t,m}} \mathrm{Sing}(Q^r_{t,m}) = \begin{cases} 2r-1, & \text{\textit{при} } t = 1 \\ 2r-2, & \text{\textit{при} } t \ge 2 \end{cases}$

Доказательство: При $t = 1$ множество $Q^r_{t,m}$ задается одним уравнением $\sum_{j=1}^r x_{1j} y_{j1} = 0$, а множество $\mathrm{Sing}(Q^r_{t,m})$ уравнениями $x_{11} = \dots = x_{1r} = y_{11} = \dots = y_{r1} = 0$, откуда все следует. При $t = 2$ множество $Q^r_{t,m}$ задается двумя уравнениями $\sum_{j=1}^r x_{2j} y_{j1} = \sum_{j=1}^r (x_{1j} y_{j1} + x_{2j} y_{j2}) = 0$, а множество $\mathrm{Sing}(Q^r_{t,m})$ уравнениями $x_{21} = \dots = x_{2r} = y_{11} = \dots = y_{r1} = 0$, откуда также все следует.

Далее воспользуемся индукцией по t. Пусть $t \geq 3$. Заметим, что $\mathrm{Sing}(Q^r_{t,m})$ задается уравнениями $x_{t1} = \cdots = x_{tr} = y_{11} = \cdots = y_{r1} = 0$, а также

$$\sum_{2\leq i\leq t-1,\ 1\leq j\leq r} x_{ij}y_{ji} = \sum_{3\leq i\leq t-1,\ 1\leq j\leq r} x_{ij}y_{j,i-1} = \cdots = \sum_{1\leq j\leq r} x_{t-1,j}y_{j2} = 0,$$

в которые не входят переменные $x_{11}, \ldots, x_{1m}, x_{t,r+1}, \ldots, x_{r,m}$, а также переменные $y_{r+1,1}, \ldots, y_{m,1}, y_{1t}, \ldots, y_{m,t}$. Отсюда получаем $\mathrm{Sing}(Q^r_{t,m}) \cong Q^r_{t-2,m} \times \mathbb{C}^{4m-2r}$, значит $\dim(\mathrm{Sing}(Q^r_{t,m})) = 2(t-2)m-(t-2)+4m-2r = 2tm-t-(2r-2)$, откуда $\mathrm{codim}_{M_i}(\mathrm{Sing}(Q^r_{t,m})) = t + (2r-2)$. Остается заметить, что $Q^r_{t,m}$ задается t уравнениями, которые в общей точке независимы, а коразмерность множества особенностей строго больше t. $\square$

Теперь все следует из следующей

Лемма 20.15 (Хартсхорн). *Пусть X — полное пересечение в проективном пространстве $\mathbb{P}^N$, $\dim X \geq 2$. Если $\mathrm{codim}_X \mathrm{Sing}(X) \geq 2$, то X неприводимо.*

Доказательство: Пусть $X = Z_1 \cup Z_2$, $\emptyset \neq Z_i \neq X$. Тогда $Z_1 \cap Z_2 \subset \mathrm{Sing}(X)$. Пусть $P \subset \mathbb{P}^N$ — общее линейное подпространство, $\mathrm{codim}\, P = \dim X - 1$. Тогда $P \cap \mathrm{Sing}(X) = \emptyset$, и по теореме Бертини $P \cap X$ — связная кривая. Значит для какого-то i имеем $P \cap Z_i \subset P \cap (Z_1 \cap Z_2) = \emptyset$, что невозможно по соображениям размерности. $\square$

Доказательство теоремы: Рассмотрим $\mathbb{P}(Q^r_{t,m}) \subset \mathbb{P}(M_i)$. Оно удовлетворяет предположениям леммы Хартсхорна, так как $2r - 2 \geq 2$ при $r \geq 2$, и значит неприводимо. Поэтому неприводимо и само $Q^r_{t,m}$. $\square$