НМУ, Комплексно аналитические многообразия и голоморфные расслоения. Листок 10. Кэлеровы многообразия. 12.05.2007.

Задача 1. Пусть M комплексное многообразие, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$, $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ эрмитова метрика, а ∇ связность Леви-Чивиты, согласованная с римановой метрикой $\mathrm{Re}\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. Пусть J оператор комплексной структуры, а ω ассоциированная с метрикой $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ форма.

a) Докажите, что метрика $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ кэлерова тогда и только тогда, когда $\nabla\omega = 0$, то есть когда параллельный перенос не только ортогонален, то есть сохраняет риманову метрику $\mathrm{Re}\langle\cdot\,,\cdot\rangle$, но и унитарен, то есть сохраняет эрмитову структуру.

b) Докажите, что метрика $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ кэлерова тогда и только тогда, когда $\nabla J = 0$.

Задача 2. Постройте пример компактного комплексного многообразия, которое не является кэлеровым.

Указание. Рассмотрите действие $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$, порождённое отображением $(z_1, z_2) \longmapsto (2z_1, 2z_2)$. Докажите, что факторпространство гомеоморфно $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^3$. Таким образом, мы вводим на $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^3$ структуру комплексно голоморфного многообразия. Вычислите $H^2(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^3)$, и сделайте выводы.

Задача 3. Кэлерова метрика $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ на многообразии M такая, что ассоциированная $(1,1)$-форма ω даёт рациональный когомологический класс

$$[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Q}),$$

называется *метрикой Ходжа.* Подразумевая фиксированную метрику, иногда говорят, что само многообразие M ходжево. Докажите, что комплексно-аналитическое подмногообразие ходжева многообразия само является ходжевым многообразием.

Задача 4. Докажите, что все неособые комплексные подмногообразия в $\mathbb{C}P^n$ являются многообразиями Ходжа.

Задача 5. Докажите, что если усреднить на торе $\mathbb{T}^{2n} = \mathbb{C}^n/\Gamma$ ходжеву метрику, то получится ходжева метрика с теми же периодами.