НМУ, Комплексно аналитические многообразия
и голоморфные расслоения. Листок 11.
Кэлеровы многообразия II. 19.05.2007.

Из-за незватки времени на лекции мы не успели изучить теорему Лефшеца, и она превращена в задачу. Если нет желания решать, можно прочитать в книге Гриффитса и Харриса.

Задача 1. Докажите теорему Лефшеца о гиперплоском сечении. Пусть M компактное n-мерное комплексное многообразие, $V \subset M$ гладкая гиперповерхность, причём расслоение $L = [V]$ положительно. Тогда отображение

$$H^q(M, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\iota} H^q(V, \mathbb{Q}),$$

индуцированное вложением $\iota : V \hookrightarrow M$, является изоморфизмом при $q \leqslant n-2$ и инъективно при $q = n-1$.

(Теорема называется теоремой о гиперплоском сечении, так как условиям теоремы удовлетворяют подмногообразие проективного пространства $M \subset \mathbb{C}P^N$ и гиперплоское сечение $V = M \cap H$).

Указания.

1. *Заметьте, что теорему достаточно доказать для когомологий с коэффициентами в* $\mathbb{C}$. *После чего докажите, используя разложение Ходжа и известные изоморфизмы, что достаточно доказать, что отображение*

$$H^p(M, \Omega^q_M) \longrightarrow H^p(V, \Omega^q_V)$$

является изоморфизмом при $p+q \leqslant n-2$ *и инъективно при* $p+q = n-1$.

2. *Представьте отображение ограничения* $\Omega^p_M \longrightarrow \Omega^p_V$ *как композицию отображений*

$$\Omega^p_M \xrightarrow{r} \Omega^p_M|_V \xrightarrow{i} \Omega^p_V,$$

где $\Omega^p_M|_V$ *пучок сечений расслоения* $(\bigwedge^p T^{*\prime} M)|_V$, *рассматриваемый либо как пучок на* V, *либо посредством продолжения как пучок на* M, r *отображение ограничения, а* i *отображение, индуцированное естественной проекцией* $(\bigwedge^p T^{*\prime} M)|_V \longrightarrow \bigwedge^p T^{*\prime} V$.

3. *Заметьте, что* r *включается в точную последовательность пучков на* M

$$0 \longrightarrow \Omega^p_M(-V) \longrightarrow \Omega^p_M \xrightarrow{r} \Omega^p_M|_V \longrightarrow 0.$$

4. *Для любой точки* $p \in V$ *имеется последовательность*

$$0 \longrightarrow N^*_p V \longrightarrow T^{*\prime}_p M \longrightarrow T^{*\prime}_p V \longrightarrow 0.$$

Получите из неё последовательность

$$0 \longrightarrow N^*_p V \otimes \bigwedge^{p-1} T^{*\prime}_p V \longrightarrow \bigwedge^p T^{*\prime}_p M \longrightarrow \bigwedge^p T^{*\prime}_p V \longrightarrow 0,$$

а из этой последовательности (используя формулу присоединения) получите

$$0 \longrightarrow \Omega^{p-1}_V(-V) \longrightarrow \Omega^p_M|_V \xrightarrow{i} \Omega^p_V \longrightarrow 0.$$

5. *Так как расслоение* $[-V]$ *отрицательно на* M, *то его ограничение* $[-V]|_V$ *на* V *тоже отрицательно. Используя теорему Кодаиры об обращении в ноль для* $H^q(M, \Omega^p_M(-V))$ *и* $H^q(V, \Omega^{p-1}_M(-V))$, *а также изоморфизм* $H^*(M, \Omega^*_M|_V) = H^*(V, \Omega^p_M|_V)$, *изучите отображение*

$$H^q(M, \Omega^p_M) \xrightarrow{r^*} H^q(M, \Omega^p_M|_V) \xrightarrow{i^*} H^q(V, \Omega^p_V).$$