НМУ, Комплексно аналитические многообразия и голоморфные расслоения. Листок 2. Пучки I. 10.03.2007.

Тем, кто знал пучки ранее, тоже полезно хотя бы пробежать глазами эти задачи. Пройденный материал не позволяет нам пока рассмотреть много полезных задач, поэтому в следующий раз будет листок «Пучки II».

Задача 1. Доказать, что рассмотренные на лекции пучки на самом деле являются пучками (при этом не забудьте проверить свойства предпучка тоже).

По сути, достаточно доказать это для

a) C_M — пучка непрерывных функций на топологическом пространстве M;

b) C^∞_M — пучка гладких функций на многообразии M;

c) $\mathscr{O}_M$ — пучка голоморфных функций на комплексно аналитическом многообразии M;

d) $\mathbb{Z}_M$ — пучка локально постоянных $\mathbb{Z}$-значных функций на топологическом пространстве M;

e) J_V — пучка голоморных функций на комплексно аналитическом многообразии M, равых нулю на аналитическом подмножестве $V \subset M$;

для остальных это аналогично.

Задача 2. Докажите, что прямая сумма двух (пред)пучков $\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$ является (пред)пучком, где прямая сумма определяется правилами

a) $[\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}](U) = \mathscr{F}(U) \oplus \mathscr{G}(U)$,

b) ${}_{\mathscr{F}\oplus\mathscr{G}}r^U_V = {}_{\mathscr{F}}r^U_V \oplus {}_{\mathscr{G}}r^U_V$, где левый нижний индекс обозначает соответствующий пучок.

Задача 3. Определите аналогичным образом (пред)пучок локальных морфизмов (также называемый пучком гомоморфизмов) $\operatorname{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$, и проверьте, что это (пред)пучок.

Задача 4. В доказательстве теоремы о связи между локально тривиальными расслоениями и локально свободными пучками мы не доказали, что, при замене расслоения на изоморфное, пучок тоже меняется на изоморфный. Докажите это.

Задача 5. *Носителем* $\operatorname{supp} s$ *сечения* $s \in \mathscr{F}(U)$ называется множество $\operatorname{supp} s = \{x \in U | s_x \neq 0\}$. Докажите, что $\operatorname{supp} s$ замкнуто в U. Носителем пучка $\mathscr{F}$ на многообразии M называется множество $supp\,\mathscr{F} = \{x \in M | \mathscr{F}_x \neq 0\}$, это множество может быть незамкнуто (попробуйте построить пример).

Задача 6. Попробуйте сами разобраться с запутанным местом в доказательстве последней теоремы (о том, что $\mathscr{F} \cong \hat{\mathscr{F}}$, где $\mathscr{F}$ некоторый пучок, а $\hat{\mathscr{F}}$ пучок сечений накрытия $\text{Spé}\mathscr{F} \longrightarrow M$), то есть докажите, что отображение $\tau_U : \mathscr{F} \longrightarrow \hat{\mathscr{F}}$, заданное правилом $[\tau_U(s)](x) = s_x$, где $s \in \mathscr{F}(U)$, сюръективно. Мы вернёмся к этому в начале следующей лекции.