НМУ, Комплексно аналитические многообразия
и голоморфные расслоения. Листок 4.
Пучки III. 24.03.2007.

Задача 1. Мы определяли множество сечений $\mathscr{F}(S)$ пучка $\mathscr{F}$ над *замкнутым* множеством S как прямой предел $\mathscr{F}(S) = \varinjlim_{U \supset S} \mathscr{F}(U)$. Докажите, что это эквивалентно определению $\mathscr{F}(S)$ как множества сечений $\Gamma(S, (\mathrm{Sp\acute{e}}\,\mathscr{F})|_S)$ ограничения этального пространства $\mathrm{Sp\acute{e}}\,\mathscr{F}$ на S.

Задача 2. Обратите внимание на то, что этальное пространство является накрытием, но оно вполне может не быть локально тривиальным накрытием! Попытайтесь построить такой пример.

Задача 3. Потратив много времени на коядро, мы не обсудили того, что если есть морфизм пучков $\mathscr{A} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{B}$, то предпучок $\mathscr{C}$, такой что $\mathscr{C}(U) = \alpha_U(\mathscr{A}(U))$ может не быть пучком, поэтому правильно определять *образ пучка* $\alpha(\mathscr{A})$ как пучок, соотвествующий предпучку $\mathscr{C}$. «Расшифруйте конструктивно» это определение, подобно тому, как мы это делали для коядра.

Задача 4. Докажите, что если $0 \longrightarrow \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{C}^*(\mathscr{A})$ каноническая резольвента пучка $\mathscr{A}$, построенная на лекции с помощью разрывных сечений, то индуцированная последовательность глобальных сечений

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{A}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{C}^0(\mathscr{A})) \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{C}^1(\mathscr{A})) \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{C}^2(\mathscr{A})) \longrightarrow \dots$$

действительно образует коцепной комплекс (абелевых групп).

Задача 5. Проверьте, что все утверждения о функториальных свойствах когомологий $H^*(X,\mathscr{A})$, оставленные на лекции в качестве упражнения, действительно верны.

Задача 6. (Абстрактная теорема де Рама). Пусть $0 \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{A}^*$ некоторая резольвента пучка $\mathscr{G}$.

а) Положим

$$\mathscr{K}^p = \mathrm{Ker}(\mathscr{A}^p \longrightarrow \mathscr{A}^{p+1}) = \mathrm{Im}(\mathscr{A}^{p-1} \longrightarrow \mathscr{A}^p),$$

при этом $\mathscr{K}^0 = \mathscr{G}$. Докажите, что $\mathrm{Ker}(\Gamma(X,\mathscr{A}^p) \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{A}^{p+1})) \cong \Gamma(X,\mathscr{K}^p)$.

б) Короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathscr{K}^{p-1} \longrightarrow \mathscr{A}^{p-1} \longrightarrow \mathscr{K}^p \longrightarrow 0$$

индуцирует длинную точную последовательность

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{K}^{p-1}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{A}^{p-1}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{K}^p) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1(X,\mathscr{K}^{p-1}) \longrightarrow H^1(X,\mathscr{A}^{p-1}) \longrightarrow \dots$$

Используя результат а) докажите, что

$$H^p(\Gamma(X,\mathscr{A}^*)) \cong \Gamma(X,\mathscr{K}^p)/\,\mathrm{Im}(\Gamma(X,\mathscr{A}^{p-1}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{K}^p)),$$

где

$$H^p(\Gamma(X,\mathscr{A}^*)) = \mathrm{Ker}(\Gamma(X,\mathscr{A}^p) \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{A}^{p+1}))/\,\mathrm{Im}(\Gamma(X,\mathscr{A}^{p-1}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{A}^p)),$$

и, используя точность вышеупомянутой длинной последовательности, определите отображение

$$\gamma_1^p : H^p(\Gamma(X,\mathscr{A}^*)) \longrightarrow H^1(X,\mathscr{K}^{p-1}).$$

б) Докажите, что γ_1^p инъективно.

в) Если резольвента ациклична, то $H^1(X, \mathscr{A}^{p-1}) = 0$. Докажите, что для ациклической резольвенты γ_1^p изоморфизм.

г) Рассмотрев точные последовательности

$$0 \longrightarrow \mathscr{K}^{p-r} \longrightarrow \mathscr{A}^{p-r} \longrightarrow \mathscr{K}^{p-r+1} \longrightarrow 0,$$

где $2 \leqslant r \leqslant p$, постройте отображение

$$\gamma_r^p : H^{r-1}(X, \mathscr{K}^{p-r+1}) \longrightarrow H^r(X, \mathscr{K}^{p-r}).$$

Докажите, что для ациклической резольвенты это изоморфизм.

д) Проверьте, что если

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & \mathscr{G} & \longrightarrow & \mathscr{A}^* \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle g} \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{J} & \longrightarrow & \mathscr{B}^*
\end{array}$$

гомоморфизм резольвент, то диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
H^p(\Gamma(X, \mathscr{A}^*)) & \xrightarrow{\gamma^p} & H^p(X, \mathscr{G}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle g_p} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_p} \\
H^p(\Gamma(X, \mathscr{B}^*)) & \xrightarrow{\gamma^p} & H^p(X, \mathscr{J}),
\end{array}$$

где g_p — индуцированное отображение когомологий комплексов, тоже коммутативны.

В результате мы получаем естественное отображение $\gamma_p = \gamma_p^p \circ \gamma_{p-1}^p \circ \cdots \circ \gamma_2^p \circ \gamma_1^p$,

$$H^p(\Gamma(X, \mathscr{A}^*)) \xrightarrow{\gamma_1^p} H^1(X, \mathscr{K}^{p-1}) \xrightarrow{\gamma_2^p} H^2(X, \mathscr{K}^{p-2}) \xrightarrow{\gamma_3^p} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{\gamma_p^p} H^p(X, \mathscr{K}^0) \cong H^p(X, \mathscr{G}),$$

являющееся изоморфизмом, если резольвента ациклична. Это и есть абстрактная теорема де Рама, точная формулировка которой такая.

Пусть $\mathscr{G}$ пучок на пространстве X, пусть $0 \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{A}^*$ резольвента пучка $\mathscr{G}$. Тогда имеется естественный гомоморфизм

$$\gamma^p : H^p(\Gamma(X, \mathscr{A}^*)) \longrightarrow H^p(X, \mathscr{G}),$$

где

$$H^p(\Gamma(X, \mathscr{A}^*)) = \mathrm{Ker}(\Gamma(X, \mathscr{A}^p) \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{A}^{p+1}))/\,\mathrm{Im}(\Gamma(X, \mathscr{A}^{p-1}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{A}^p)),$$

причем γ^p является изоморфизмом, если резольвента ациклична.

е) Докажите следующиее следствие теоремы де Рама: если в пункте д) отображение f изоморфизм пучков, а обе резольвенты ацикличны, то гомоморфизмы g_p являются изоморфизмами.

Задача 7. В качестве элементарного следствия из пункта е) предыдущей задачи получите теорему де Рама об изоморфизме между когомологиями де Рама и гладкими сингулярными когомологиями (то есть сингулярными когомологиями, где мы рассматриваем только гладкие симлексы).

Задача 8. Докажите, что пучок модулей над мягким пучком колец — мягкий пучок.

Задача 9. На лекции доказательство этого утверждения было дано скороговоркой, проработайте детали. Пусть $\mathscr{J}$ — локально свободный пучок $\mathscr{R}$-модулей, и

$$0 \longrightarrow \mathscr{A}' \longrightarrow \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}'' \longrightarrow 0$$

короткая точная последовательность $\mathscr{R}$-модулей. Докажите, что последовательность

$$0 \longrightarrow \mathscr{A}' \otimes_{\mathscr{R}} \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{A} \otimes_{\mathscr{R}} \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{A}'' \otimes_{\mathscr{R}} \mathscr{J} \longrightarrow 0$$

точна.

Задача 10. Обдумайте (на лекции это было, но ещё раз это сделать крайне полезно), что абстрактная теорема де Рама даёт для резольвент

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{i} \mathscr{A}_X^0 \xrightarrow{d} \mathscr{A}_X^1 \xrightarrow{d} \mathscr{A}_X^2 \xrightarrow{d} \ldots,$$

$$0 \longrightarrow \Omega^p \xrightarrow{i} \mathscr{A}_X^{p,0} \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{A}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{A}_X^{p,2} \xrightarrow{\bar\partial} \ldots,$$

и

$$0 \longrightarrow \Omega^p(E) \xrightarrow{i} \mathscr{A}_X^{p,0}(E) \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{A}_X^{p,1}(E) \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{A}_X^{p,2}(E) \xrightarrow{\bar\partial} \ldots,$$

где $\mathscr{A}_X^p$ — пучок p-форм на X, $\mathscr{A}_X^{p,q}$ — пучок (p,q)-форм на X, Ω_X^p — пучок голоморфных p-форм на X, $E \longrightarrow X$ векторное расслоение, $\mathscr{A}_X^{p,q}(E)$ — пучок E-значных (p,q)-форм на X, $\Omega_X^p(E)$ — пучок E-значных голоморфных p-форм на X.