НМУ, Комплексно аналитические многообразия и голоморфные расслоения. Листок 6.
Комплексный анализ II. Аналитические подмножества. 7.04.2007.

Задача 1. Докажите голоморфную теорему о неявной функции.

Пусть $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}_n$, $k < n$, такие голоморфные в окрестности нуля функции $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, что

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k} \neq 0.$$

Тогда существуют такие голоморфные в окрестности нуля функции $w_1, \ldots$, $w_k \in \mathcal{O}_{n-k}$, что в некоторой окрестности $0 \in \mathbb{C}^n$

$$f_1(z) = \cdots = f_k(z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z_i = w_i(z_{k+1}, \ldots, z_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Указание. Примените обычную C^∞-теорему о неявной функции, и получите C^∞-функции w_j с требуемыми свойствами. После этого из того, что $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} f_j(w(z), z) = 0$, где $k+1 \leqslant \alpha \leqslant n$, получите $\frac{\partial w_l}{\partial \bar{z}_\alpha} = 0$, то есть голоморфность w_l, для всех l.

Задача 2. Докажите голоморфную теорему об обратной функции.

Пусть U, V открытые подмножества в $\mathbb{C}^n$, причём $0 \in U$, и пусть $f : U \longrightarrow V$ такое голоморфное отображение, что голоморфный якобиан $J(f) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)$ невырожден в нуле. Тогда отображение f взаимно однозначно в окрестности $0 \in \mathbb{C}^n$, и обратное отображение f^{-1} голоморфно в точке $f(0)$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что вещественный якобиан $J_{\mathbb{R}}(f)$ связан с голоморфным (это обсуждалось на последней лекции) таким образом, что $\det J_{\mathbb{R}}(f) = \det J_{\mathbb{C}}(f) = |\det J(f)|^2$, поэтому вещественный якобиан $J_{\mathbb{R}}(f)$ тоже невырожден. Осталось, как и в предыдущей задаче, применить обычную C^∞-теорему об обратной функции, чтобы построить C^∞-отображение f^{-1}, а затем доказать голоморфность f^{-1}.

Задача 3. Доказанная нами на последней лекции $\bar\partial$-лемма Пуанкаре на языке когомологий означает, что $H^{p,q}_{\bar\partial}(\Delta) = 0$ при $q \geqslant 1$, где Δ полидиск в $\mathbb{C}^n$, а

$$H^{p,q}_{\bar\partial} = \operatorname{Ker}(A^{p,q} \xrightarrow{\bar\partial} A^{p,q+1}) / \operatorname{Im}(A^{p,q-1} \xrightarrow{\bar\partial} A^{p,q})$$

когомологии Дольбо. Докажите аналогичным образом, но используя ряды Лорана, что $H^{p,q}_{\bar\partial}(\Delta^{*k} \times \Delta^l) = 0$ при $q \geqslant 1$, где Δ^l полидиск в $\mathbb{C}^l$, а $\Delta^{*k} = \Delta^k \setminus \{0\}$ проколотый полидиск в $\mathbb{C}^k$.

Задача 4. Докажите, что аналитическая гиперповерхность

$$V = \{z \mid f(z) = 0\} \subset U \subset \mathbb{C}^n, \quad f \in \mathcal{O}(U),$$

может быть в некоторой окрестности любой своей точки p единственным образом быть представлена как объединение конечного числа аналитических гиперповерхностей, неприводимых в p.

Указание. Утверждение немедленно следует из факториальности кольца $\mathcal{O}_{n,p}$.

Задача 5*. Пусть $W = \{z \mid f(z) = g(z) = 0\} \subset U \subset \mathbb{C}^n$ такое аналитическое множество, заданное в некоторой окрестности U точки $0 \in W$ как множество нулей двух голоморфных функций f и g, что W не содержит аналитической гиперповерхности. Докажите, что проектирование W на подходящим образом выбранную $(n-2)$-плоскость $\mathbb{C}^{n-2}$ представляет W локально как конечнолистное разветвлённое накрытие некоторой окрестности нуля в $\mathbb{C}^{n-2}$.

Указание. Так как W не содержит аналитической гиперповерхности, то f и g взаимно просты в $\mathscr{O}_n$. Используя результант f и g, докажите, что W хорошо проектируется в аналитическую гиперповерхность в окрестности $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$, после чего примените задачу 1 из предыдущего листка к этой гиперповерхности.

Задача 6. Пусть $V \subset U \subset \mathbb{C}^n$ аналитическое множество, содержащее точку $0 \in \mathbb{C}^n$, и неприводимое в этой точке. Докажите, что если образ $\pi(V)$ при проектировании $\pi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ таков, что для некоторой достаточно малой окрестности нуля Δ образ $\pi(V \cap \Delta)$ содержит окрестность точки $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$, то V аналитическая гиперповерхность в окрестности нуля.

Указание. Если в окрестности нуля

$$V = \{z \mid f_1(z) = \cdots = f_k(z) = 0\},$$

то $f_i \in \mathscr{O}_n$ должны иметь общий множитель $g(z)$ в $\mathscr{O}_n$, что можно увидеть, используя предыдущую задачу. После чего докажите, что из неприводимости V в нуле следует, что $V = \{z \mid g(z) = 0\}$.