НМУ, Комплексно аналитические многообразия
и голоморфные расслоения. Листок 7.
Аналитические подмножества II. Связность в расслоениях. 14.04.2007.

Задача 1. Докажите, что множество V^{sing} особых точек аналитического подмножества $V \subset \mathbb{C}^n$ содержится в некотором аналитическом подмножестве, не совпадающем с V.

Указание. Докажите, что V^{sing} содержится в аналитическом подмножестве, заданном условием вырожденности некоторого минора в якобиане.

Задача 2. Докажите, что аналитическая гиперповерхность $V \subset \mathbb{C}^n$ неприводима тогда и только тогда, когда её регулярная часть V^{reg} связна.

Указание. Докажите, что замыкание $\overline{V}_i$ связной компоненты V_i регулярной части V^{reg} является аналитическим подмножеством. Для этого воспользуйтесь результантом f и $\dfrac{\partial f}{\partial z^n}$, где $f = 0$ уравнение V.

Задача 3. Докажите, что $V \subset \mathbb{C}^n$ имеет конечный объём в ограниченных областях.

Используйте то, что аналитическое подмножество локально есть развлетвлённое накрытие полидиска.

Задача 4. Докажите теорему Стокса для аналитических подмножеств. Если M комплексное многообразие, $V \subset M$ аналитическое подмножество размерности $\dim V = k$, а $\varphi \in A_c^{2k-1}(M)$ форма степени $2k-1$ на M с компактным носителем, то

$$\int_V d\varphi = 0.$$

Указание. Докажите, что достаточно доказать это утверждение локально, то есть в окрестности точки. Затем используйте то, что аналитическое подмножество локально есть развлетвлённое накрытие полидиска.

Задача 5. Рассмотрим голоморфное расслоение $E \longrightarrow M$ с эрмитовым скалярным произведением $(\,,)$. Выберем произвольную точку $p \in M$ и выберем такие (голоморфные) координаты $z = (z^1, \ldots, z^n)$ в окрестности точки p, что координатами p будут $z = 0 = (0, \ldots, 0)$.

а) Докажите, что в достаточно малой окрестности U точки p можно выбрать такой голоморфный базис в сечениях $\Gamma(U, E)$, что матрица h скалярного произведения $(\,,)$ в этом базисе имеет вид

$$h(z) = I + O(|z|^2) \tag{1}$$

при $|z| \to 0$.

б) Докажите, что при этом для матрицы кривизны F в этом базисе верна формула

$$F(0) = \bar{\partial}\partial h(0).$$

Указание. Сначала сделайте такую постоянную по z линейную замену базиса, что $h(0)$ превращается в I, а затем сделайте линейную замену базиса с матрицей вида $I + A(z)$, где $A(z)$ линейно по z, $A(0) = 0$, которая приводит к формуле (1)

Задача 6. Как хорошо известно из курса дифференциальной геометрии, на универсальном (тавтологическом) расслоении $\gamma^1 = (E, p, \mathbb{C}P^n)$ над $\mathbb{C}P^n$ существует естественная связность, индуцированная естественным вложением в тривиальное расслоение $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$. Напомним, что эта связность задана формулой

$$\nabla s = P(ds),$$

где P унитарный (относительно стандартного эрмитова скалярного произведения в $\mathbb{C}^{n+1}$) зависящий от точки базы $p \in \mathbb{C}P^n$ проектор $P : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow E_p$ на слой $E_p \subset \mathbb{C}^{n+1}$ над точкой p.

Докажите, что эта связность каноническая для естественной метрики на γ^1, индуцированной из стандартного эрмитова скалярного произведения на $\mathbb{C}^{n+1}$.

Задача 7. На лекции мы построили метрику Фубини-Штуди на $\mathbb{C}P^n$ и записали её в стандартных неоднородных координатах. Упростите эту явную формулу в случае $\mathbb{C}P^1$ и постройте соответствующую каноническую связность в $T\mathbb{C}P^1$.