НМУ, Комплексно аналитические многообразия и голоморфные расслоения. Листок 8. Расслоения и характеристические классы. 21.04.2007.

Задача 1. Найдите первый класс Чженя $c_1(T\mathbb{C}P^1)$ касательного расслоения одномерного проективного пространства $\mathbb{C}P^1$ и число Чженя

$$\langle c_1(T\mathbb{C}P^1), [\mathbb{C}P^1]\rangle := \int_{\mathbb{C}P^1} c_1(T\mathbb{C}P^1).$$

Задача 2. Как мы выяснили на лекции, первый класс Чженя c_1 от расслоений над базой M, который мы определили с помощью форм кривизны связностей по Чженю-Вейлю, можно рассматривать как отображение $c_1 = j \circ \delta$,

$$\begin{tikzcd}
H^1(M, \mathscr{O}^*) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "c_1"'] & H^2(M, \mathbb{Z}) \arrow[d, "j"] \\
& H^2(M, \mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

где j естественное отображение, а δ гомоморфизм Бокштейна в длинной точной последовательности в когомологиях, индуцированной из короткой точной последовательности пучков

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathscr{O} \xrightarrow{\exp} \mathscr{O}^* \longrightarrow 0,$$

поэтому мы отождествляем c_1 и δ.

Докажите, что образ $c_1 = \delta$ в $H^2(M, \mathbb{Z})$ является в точности прообразом $j^{-1}(H^2_{1,1}(M, \mathbb{R}))$ пространства $H^2_{1,1}(M, \mathbb{R}) \subset H^2(M, \mathbb{R})$, порожденного когомологическими классами, у которых есть представители в виде форм типа $(1, 1)$.

Указание. Используйте то, что форма кривизны канонической связности имеет тип $(1, 1)$, и докажите, что $j^{-1}(H^2_{1,1}(M, \mathbb{R}))$ лежит в ядре отображения

$$H^2(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M, \mathscr{O})$$

из вышеупомянутой длинной точной последовательности.

Задача 3. Используя второй класс Чженя c_2, докажите, что универсальное расслоение γ^2 над многообразием Грассмана $G_2(\mathbb{C}^3)$ нетривиально.

Указание. Докажите, что число Чженя

$$\langle c_2(\gamma^2), [G_2(\mathbb{C}^3)]\rangle := \int_{G_2(\mathbb{C}^3)} c_2(\gamma^2)$$

не равно нулю.