НМУ, Комплексно аналитические многообразия и голоморфные расслоения. Листок 9. Линейные расслоения и дивизоры. 28.04.2007.

Задача 1. Если M компактная риманова поверхность, то определим *степень* линейного расслоения L как число Чженя.

$$\deg L = \langle c_1(L), [M] \rangle.$$

Докажите, что обычная теорема Гаусса-Бонне может быть переписана как равенство между степенью голоморфного касательного расслоения $T'M = (T^{\mathbb{C}}M)^{1,0}$ и эйлеровой характеристикой:

$$\deg T'M = \chi(M).$$

Задача 2. Пусть M компактное комплексное многообразие, а $V \subset M$ гладкая аналитическая гиперповерхность. Пусть

$$N_V = (T'M)|_V / T'V$$

(голоморфное) нормальное расслоение к V в M. Докажите первую формулу присоединения

$$N_V^* = [-V]|_V,$$

то есть докажите, что *конормальное расслоение к* V, то есть двойственное к нормальному расслоению к V в M, есть ограничение расслоения $[-V]$ на V.

Указание. Пусть локально V задаётся функциями $f_\alpha \in \mathscr{O}(U_\alpha)$. Тогда локальные сечения $df_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathscr{O}(N_V^*))$ вместе задают глобальное не обращающееся в ноль сечение расслоения $N_V^* \otimes [V]$.

Задача 3. Докажите вторую формулу присоединения

$$K_V = K_M|_V \otimes N_V,$$

где K_M и K_V канонические расслоения M и V соответственно, то есть

$$K_M = \det(T'M)^*, \quad K_V = \det(T'V)^*.$$

Задача 4. Пусть $\mathscr{L}(D)$ пространство таких мероморфных на M функций f, что $D + (f) \geqslant 0$, то есть $D + (f)$ эффективный дивизор. Докажите, что умножение на некоторое сечение s_0 расслоения $[D]$ задаёт отождествление

$$\mathscr{L}(D) \xrightarrow{\otimes s_0} H^0(M, \mathscr{O}([D])).$$

Задача 5. Пусть E голоморфное векторное расслоение над M, $\mathscr{E}$ пучок его голоморфных сечений, $D = \sum_i a_i V_i$ эффективный дивизор на M, $s_0 \in H^0(M, \mathscr{O}([D]))$, $\mathscr{E}(D)$ пучок мероморфных сечений $\mathscr{E}$ с полюсами порядка $\leqslant a_i$ на V_i, $\mathscr{E}(-D)$ пучок мероморфных сечений $\mathscr{E}$ с нулями порядка $\geqslant a_i$ на V_i.

Докажите, что тогда умножение на s_0 и s_0^{-1} задаёт отождествления

$$\mathscr{E}(D) \xrightarrow{\otimes s_0} \mathscr{O}(E \otimes [D]), \quad \mathscr{E}(-D) \xrightarrow{\otimes s_0^{-1}} \mathscr{O}(E \otimes [-D]).$$

Эта задача объясняет, в частности, почему пишут $\mathscr{O}(D)$ вместо $\mathscr{O}([D])$.

Задача 6. Докажите, что если D гладкая аналитическая гиперповерхность, то последовательность

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_M(E \otimes [-D]) \xrightarrow{\otimes s_0} \mathscr{O}_M(E) \xrightarrow{r} \mathscr{O}_D(E|_D) \longrightarrow 0$$

точна, где r отображение ограничения.