НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 10.
Римановы многообразия. Тензор кривизны.
Вторая вариация геодезических. 10.04.2007.

Задача 1. Доказать, что из-за многочисленных симметрий тензор Римана на двумерном многообразии полностью определяется своей компонентой R_{1212}.

Задача 2. Докажите, что на двумерном многообразии верно тождество

$$R = \frac{2R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Задача 3. Докажите, что на двумерной поверхности в трехмерном пространстве скалярная кривизна равна удвоенной гауссовой кривизне.

Задача 4. Пусть σ двумерное подпространство касательного пространства, натянутое на векторы X и Y. Докажите, что секционная кривизна вдоль плоскости (или двумерного направления) σ

$$K(\sigma) = \frac{< R(X,Y)X, Y >}{< X, X >< Y, Y > - < X, Y >^2}$$

корректно определена, то есть не зависит от выбора векторов X и Y, порождающих σ.

Задача 5. Докажите, что для сферы $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ радиуса r тензор Римана выражается так: $R(X,Y)Z = \frac{1}{r^2}(< Y, Z > X - < X, Z > Y)$.

Задача 6. Докажите, что в предыдущей задаче секционная кривизна не зависит ни от точки, ни от направления, и равна $K = \frac{1}{r^2}$.

Задача 7. Докажите, что северный и южный полюс сферы $\mathbb{S}^n$ являются сопряжёнными точками вдоль дуги большого круга кратности $n-1$.

Задача 8. Докажите, что для римановой связности тензор Риччи симметричен.

Задача 9*. Докажите, что на многообразии отрицательной секционной кривизны геодезические не содержат сопряжённых точек.

Задача 10*. Докажите, что для многообразия положительной секционной кривизны $K \geqslant \text{const} > 0$ существует такая постоянная T, что любая геодезическая, длина которой не меньше чем T, содержит пару точек, сопряжённых вдоль этой геодезической.

Задача 11*. Докажите, что на трехмерном многообразии тензор Риччи полностью определяет тензор Римана по формуле

$$R_{ij,kl} = R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il} + \frac{R}{2}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}).$$