НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 2.
Поверхности в трёхмерном и n-мерном евклидовом пространстве.
Ковариантная производная касательных и нормальных векторов.
Параллельный перенос. 20.02.2007

Задача 1. Написать параметрическое уравнение тора вращения и найти индуцированную метрику.

Задача 2. Найти первую и вторую квадратичные формы, а также гауссову и среднюю кривизны для сферы произвольного радиуса.

Задача 3. Найти первую и вторую квадратичные формы, а также гауссову и среднюю кривизны для поверхности вращения

$$\mathbf{r}(u, \varphi) = (x(u), \rho(u)\cos\varphi, \rho(u)\sin\varphi).$$

Задача 4. Доказать, что поверхность с нулевыми гауссовой и средней кривизнами есть плоскость.

Задача 5. Доказать, что единственными поверхностями вращения имеющими нулевую среднюю кривизну являются плоскость и катеноид, получаемый вращением кривой $\left(\dfrac{\operatorname{ch}(at+b)}{a}, t\right)$.

Задача 6. Доказать, что средняя кривизна есть интегральное среднее всех нормальных кривизн

$$H = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} k(\varphi)\,d\varphi,$$

где $k(\varphi)$ — нормальная кривизна в направлении φ, отсчитываемом от одного из главных направлений.

Задача 7. Доказать, что коммутатор двух касательных к поверхности векторных полей снова будет касательным векторным полем.

Задача 8*. Доказать первое структрурное уравнение Картана

$$d\,e^\alpha = e^\beta \wedge \Gamma^\alpha_\beta,$$

где e^α — базис, дуальный к выбранному базису e_α пространства касательных векторных полей.

Задача 9. Найти оператор Вейнгартена и ковариантные производные для
а) сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и
б) тора вращения в $\mathbb{R}^3$.

Задача 10. Доказать, что

$$\nabla_X Y(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\Pi_{x+\varepsilon X \mapsto x} Y(x+\varepsilon X) - Y(x)}{\varepsilon}$$

Задача 11. Доказать, что если две поверхности касаются вдоль кривой, то результат параллельного переноса касательного вектора вдоль этой кривой на обеих поверхностях совпадает.

Задача 12. Найти оператор переноса на прямом круговом цилиндре в $\mathbb{R}^3$. Как он зависит от кривой?

Задача 13. На какой угол повернется касательный вектор к двумерной сфере после параллельного переноса вдоль параллели $\psi = \theta$ на угол φ?

Задача 14. Для поверхности вращения найти результат параллельного переноса вдоль параллелей и меридианов.