НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 3.
Поверхности в n-мерном евклидовом пространстве.
Геодезические. 27.02.2007

Задача 1. Рассмотрим кривую в $\mathbb{R}^n$. Легко видеть, что любое базисное касательное векторное поле e_1 можно рассматривать как вектор скорости для некоторой параметризации. Пусть $g = g_{11}$.

а) Доказать, что $\frac{b^{\mu}_{11}}{g}$ не зависит от параметра кривой.

б) Доказать, что $\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln g$.

Задача 2. Рассмотрим гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$. Найдите ковариантную производную в нормальном расслоении.

Задача 3. Рассмотрим кривую в $\mathbb{R}^n$. Пусть $<\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n>$ обозначает ориентирванный объем параллелепипеда порожденного системой векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Пусть $V_i =< \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^i x}{dt^i} >$. Доказать, что кривизну и высшие кручения можно найти по формулам.

$$k = \frac{V_2}{V_1^3}, \quad \varkappa_i = \frac{V_{i+2}V_i}{V_{i+1}^2 V_1}.$$

Задача 4. Пусть $x(t)$ решение уравнение геодезических $\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = 0$, а s — натуральный параметр. Доказать, что $x(t)$ геодезическая, а $t = as + b$, $a \neq 0$.

Задача 5. Доказать, что перепараметризации геодезических будут экстремалями функционала длины $L = \int |\dot{x}(t)|\, dx$.

Задача 6. Вывести соотношение между db, b, Γ и K (уравнение Петерсона-Кодацци) по аналогии с уравнением Гаусса $d\Gamma - \Gamma \wedge \Gamma = -b^{\mu} \wedge b_{\mu}$, связывающим $d\Gamma$, Γ и b. Докажите, что в случае гиперповерхности и единичного поля нормалей уравнение Петерсона-Кодацци не содержит K.

Задача 7. Доказать, что если прямая лежит на поверхности, то она будет геодезической на этой поверхности.

Задача 8. Доказать, что если две поверхности касаются по кривой, которая геодезическая на первой поверхности, то эта кривая геодезическая и на второй поверхности.

Задача 9. Найти геодезические на

а) сфере,

б) цилиндре,

в) круговом конусе (все три поверхности в $\mathbb{R}^3$.).

Задача 10. Доказать, что меридианы поверхности вращения — геодезические. При каком условии параллель будет геодезической?

Задача 11. Найдите на круговом конусе самопересекающиеся геодезические.

Задача 12. Описать геодезические на поверхности вращения.