НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 4.
Группы и алгебры Ли. 6.03.2007

Задача 1. Доказать, что определения коммутатора в касательном пространстве в единице к группе Ли с использованием координат (как в лекциях) и с помощью правоинвариантных векторных полей эквивалентны.

Задача 2. Доказать, что дифференциал в единице гомоморфизма групп Ли будет гомоморфизмом алгебр Ли.

Задача 3. Доказать, что прямое произведение групп Ли является группой Ли. Как найти соответствующую алгебру Ли?

Задача 4. Доказать, что группа Ли всегда ориентируема.

Задача 5. Доказать, что если U — некая окрестность единицы в связной группе Ли G, то $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U^n = G$, где U^n означает множество всех произведений из n элементов U.

Задача 6. Пусть G — связная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Доказать, что если коммутатор любых элементов $\mathfrak{g}$ равен нулю, то G абелева (поэтому алгебры Ли с нулевым коммутатором называются абелевыми).

Задача 7. Постройте естественные гомоморфизмы групп Ли

а) $SU(2) \longrightarrow SO(3)$,

б) $SU(2) \times SU(2) \longrightarrow SO(4)$.

Задача 8. Доказать, что компонента связности единицы является подгруппой Ли.

Задача 9. Найти число компонент связности для

а) $GL(n,\mathbb{R})$,

б) $GL(n,\mathbb{C})$,

в) $O(n)$,

г) $SO(n)$,

д) $U(n)$,

е) $SU(n)$.