НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 8.
Связности в векторных расслоениях II. 30.03.2007.

Задача 1. Используя задание универсального расслоения над многообразием Грассмана с помощью проектора (см. задачу 7 листка 6), найти связность и кривизну связности, построенной по этому проектору.

Задача 2. Докажите, что кручение $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ является кососимметрическим по нижним индексам тензором типа $\binom{1}{2}$, то есть докажите, что $T(X,Y) = -T(Y,X)$ и $T(fX,Y) = fT(X,Y)$, где $f \in C^\infty(M)$.

Задача 3. Для связности в касательном расслоении докажите следующие тождества.

а) первое структурное уравнение Картана

$$de^\alpha = e^\beta \wedge \Gamma^\alpha_\beta + \theta^\alpha,$$

б) второе структурное уравнение Картана

$$d\Gamma^\beta_\alpha = \Gamma^\gamma_\alpha \wedge \Gamma^\beta_\gamma + \Omega^\beta_\alpha,$$

в) первое тождество Бьянки

$$d\theta^\alpha = \theta^\beta \wedge \Gamma^\alpha_\beta - e^\beta \wedge \Omega^\alpha_\beta,$$

г) второе тождество Бьянки

$$d\Omega^\beta_\alpha = \Gamma^\gamma_\alpha \wedge \Omega^\beta_\gamma - \Omega^\gamma_\alpha \wedge \Gamma^\beta_\gamma,$$

где e^α дуальный базис, Γ^α_β локальная 1-форма связности, Ω^β_α локальная 2-форма кривизны, θ^α локальная 2-форма кручения.

Задача 4. Заметим, что важно, что $\nabla s = dx^i \otimes \nabla_i s$, где $s \in \Gamma(M,E)$, а не $\nabla s = dx^i \wedge \nabla_i s$, последняя формула неверна и, для произвольного расслоения, не имеет смысла. Но есть случай, когда операция $\nabla \wedge s := dx^i \wedge \nabla_i s$ тоже интересна.

Пусть у нас есть симметрическая (то есть с нулевым кручением) связность в TM. Распространим эту связность на расслоение внешних форм. Теперь рассмотрим операцию $\nabla \wedge s := dx^i \wedge \nabla_i s$ (где мы смотрим на s как на сечение $\Lambda T^* M$, а не как на форму со значениями в сечениях). Докажите, что тогда $\nabla \wedge s$ есть просто ds (обычный внешний дифференциал). Что будет для несимметрической связности?