**НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 9.**
**Римановы многообразия. Геодезические. 3.04.2007.**

**Задача 1.** Фиксируем точку $p$ на римановом многообразии $M$. Напомним, что мы определили экспоненциальное отображение $\exp_p : T_pM \longrightarrow M$ как $\exp_p(\xi) = \gamma_\xi(1)$, где $\xi \in T_pM$, а $\gamma_\xi(t)$ геодезическая выходящая из $p$ с вектором скорости $\xi$. На лекции мы доказали, что экспоненциальное отображение является диффеоморфизмом достаточтно малой окрестности $U$ нулевого вектора из $T_pM$ на свой образ $\exp_p(U)$. Тогда экспоненциальное отображение вводит так называемые геодезические координаты в окрестности $p$ следующим образом. Фиксируем базис в касательном пространстве $T_pM$, тогда координаты касательного вектора $v$ в этом базисе по определению будут геодезическими координатами точки $\exp_p(v)$.

Докажите, что в этих координатах в точке $p$ символы Кристоффеля обращаются в ноль (в других точках, в общем-то, это неверно).

**Задача 2.** Геодезические координаты, конечно же, центрированы в точке $p$, то есть координаты $p$ равны $(0, \dots, 0)$. Докажите, что центрированные в точке $p$ координаты $x^1, \dots, x^n$, определённые в окрестности $U$, являются геодезическими тогда и только тогда, когда $\Gamma^i_{jk}x^jx^k \equiv 0$ тождественно по $x^1, \dots, x^n$ в $U$.

*Указание. Обратите внимание на то, что в геодезических координатах геодезические, проходящие через точку $p$, имеют вид $x^i = a^it$.*

**Задача 3.** Интегрируя уравнение геодезических, найти все геодезические на плоскости Лобачевского *как непараметризованные кривые*. Можно взять любую из моделей плоскости Лобаческого, например верхнюю полуплоскость с метрикой $\dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

*Указание. Найдите два интеграла исходной системы из двух дифференциальных уравнений второго порядка и используйте их для понижения порядка. Вы получите два уравнения, дающие $\dfrac{dx}{dt}$ и $\dfrac{dy}{dt}$. Выпишите тогда уравнение для $\dfrac{dy}{dx}$ и решите его.*

**Задача 4.** Докажите, что в полугеодезических координатах $x^1, \dots, x^n$, то есть в таких координатах, в которых метрика имеет вид

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} g_{ij}dx^idx^j + (dx^n)^2,$$

кривые $x^1 = \text{const}, \dots, x^{n-1} = \text{const}$ являются геодезическими с параметром $t = x^n$.

**Задача 5.** Докажите, что геодезическая $\exp_p(tv)$ и геодезическая сфера $\exp_p(S_\delta)$, где $S_\delta = \{v \in T_pM \,||v| = \delta\}$, всегда ортогональны друг другу. Как при помощи этого наблюдения ввести полугеодезические координаты в окрестности точки $p$?