НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия.
Экзамен. 15.05.2007.

Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо положить в учебной части в почтовую ячейку с моим именем (А. Пенской) не позднее, чем через неделю.

Убедительная просьба решать самостоятельно и не откладывать на последний день.

В дополнение к баллам за решение экзаменационных задач (баллы за каждую задачу указаны), также будут начислены баллы за решение задач из листков с задачами на семинарах в течение семестра из расчета 1 балл за каждые 5 решенных задач, каждый подпункт в задаче с подпунктами считается за задачу. Прием задач из листков заканчивается на семинаре 15 мая.

Пересчет баллов в оценки следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно».

Задача 1. Найдите все кривые в $\mathbb{R}^3$ такие, что $k(s) = \dfrac{1}{s}$, $\varkappa(s) = \dfrac{1}{s}$, где s натуральный параметр на кривой. *(3 балла).*

Задача 2. Из аналитической геометрии вы знаете примеры поверхностей, на которых есть два различных семейства прямолинейных образующих. Докажите, что если на гладкой двумерной поверхности в трехмерном пространстве есть три различных семейства прямолинейных образующих, то эта поверхность является куском плоскости. *(5 баллов).*

Задача 3. Рассмотрим плоскость Лобачевского, например как верхнюю полуплоскость $\mathbb{R}^2_+$ с метрикой $ds^2 = \dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$. Докажите, что секционная кривизна всюду равна -1. *(4 балла).*

Задача 4. Пусть $[z_0 : \dots : z_n]$ однородные координаты в $\mathbb{R}P^n$. Напомним, что *отображение Веронезе* степени d — это отображение $\nu_d : \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^N$, заданное формулой

$$\nu_d([z_0 : \ldots : z_n]) = [\ldots : z^I : \ldots], \tag{1}$$

где z^I это некоторый моном степени d от $z_0, \ldots, z_n$, а в правой части (1) стоят все мономы степени d. Например, при $n = 2$ и $d = 2$ получаем отображение $\mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^5$, заданное формулой

$$\nu_2([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0^2 : z_1^2 : z_2^2 : z_0z_1 : z_0z_2 : z_1z_2].$$

Найдите обратный образ $\nu_d^*\gamma^1$ универсального расслоения при этом отображении. *(5 баллов).*

Задача 5. Пусть $E \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ универсальное (тавтологическое) расслоение. Рассмотрим расслоение $\operatorname{Ann} E$, слой которого над точкой x состоит из ковекторов, принимающих нулевое значение на прямой E_x. Построить связность на расслоении $\operatorname{Ann} E$ и вычислить форму кривизны. *(7 баллов).*

Задача 6. Для ориентированной поверхности в евклидовом пространстве $M^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ выразить классы Эйлера и Понтрягина через первую и вторую квадратичные формы. *(6 баллов).*

Задача 7*. Найти число Понтрягина

$$\langle p_1(r\gamma^1_{\mathbb{H}}), [\mathbb{S}^4]\rangle = \oint_{\mathbb{S}^4} p_1(r\gamma^1_{\mathbb{H}}),$$

где $\gamma^1_{\mathbb{H}} = (E \longrightarrow \mathbb{H}P^1 \simeq S^4)$ — универсальное расслоение над кватернионной проективной прямой, а r операция овеществления (не забывайте о некоммутативности кватернионов!) *(20 баллов).*