Спецкурс

Римановы поверхности.

С.М.Натанзон

1. Голоморфные атласы.

Далее, если не оговорено противное, *под поверхностью всегда понимается компактная связная ориентируемая поверхность.* Примером такой поверхности является сфера с конечным числом дыр, у которой граничный контур каждой дыры склеен с граничным контуром тора с дырой. Число вклеенных торов называется *родом поверхности.* Поверхности такого типа гомеоморфны, если и только если они имеют одинаковый род. Более того, можно доказать, что любая компактная ориентируемая поверхность гомеоморфна поверхности, построенной таким способом. Таким образом, род является единственным топологическим инвариантом поверхности.

Риманова поверхность — это поверхность с дополнительной структурой, наделяющей точки поверхности некоторыми свойствами комплексных чисел. Эти свойства описываются с помощью *локальных карт*, то есть пар (U, z), где U — открытое подмножество поверхности P, а $z : U \to \mathbb{C}$ — непрерывное вложение в плоскость комплексных чисел $\mathbb{C}$. Семейством локальных карт $\{(U_\alpha, z_\alpha) | \alpha \in \mathcal{A}\}$ называется *голоморфным*, если отображения $z_\beta z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \bigcap U_\beta) \to \mathbb{C}$ голоморфны для всех $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$. Голоморфные семейства локальных карт $\{(U_\alpha, z_\alpha) | \alpha \in \mathcal{A}\}$ и $\{(V_\beta, w_\beta) | \beta \in \mathcal{B}\}$ на поверхности P считаются *эквивалентными*, если отображение $w_\beta z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \bigcap V_\beta) \to \mathbb{C}$ голоморфно для всех $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$.

Голоморфное семейство локальных карт, покрывающее всю поверхность, называется *голоморфным атласом. Римановой поверхностью* называется (топологическая) поверхность P вместе с классом эквивалентности голоморфных атласов локальных карт.

Пример 1.1. *Сфера Римана $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \infty$ с атласом из двух локальных карт $\{(U_1, z_1)(U_2, z_2)\}$, где $U_1 = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 2\}$, $z_1(z) = z\}$ и $U_2 = \{z \in \mathbb{C} | |z| > \frac{1}{2}\}$, $z_2(z) = \frac{1}{z}\}$.*

Пример 1.2. *Комплексный тор $T = \mathbb{C}/\Gamma$, где Γ — группа параллельных переносов, порожденная сдвигами $z \mapsto z + 1$ и $z \mapsto z + \tau$ и $\mathfrak{Im}(\tau) > 0$.*

Пример 1.3. *Гиперэллиптическая риманова поверхность $P_F = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | F(x, y) = 0\}$, где $F(x, y) = y^2 - (x^{2m+1} + a_{2m}x^{2m} + ... + a_1 x + a_0)$.*

Задача 1.1. *Предъявить естественные голоморфные атласы локальных карт для примеров комплексных торов и гиперэллиптических римановых поверхностей.*

2. Голоморфные отображения. Формула Римана - Гурвица.

Пусть P и Q — римановы поверхности, заданные голоморфными атласами локальных карт $\{(U_\alpha, z_\alpha) | \alpha \in \mathcal{A}\}$ и $\{(V_\beta, w_\beta) | \beta \in \mathcal{B}\}$ соответственно. *Голоморфным отображением* римановой поверхности P на римановой поверхность Q называется отображение $f : P \to Q$ такое, что отображение $w_\beta f z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \bigcap f^{-1}(V_\beta)) \to \mathbb{C}$ голоморфно для всех $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$ таких что $U_\alpha \bigcap f^{-1}(V_\beta) \neq \emptyset$.

Задача 2.1. *Доказать, что это определение не зависит от выбора голоморфных атласов локальных карт, описывающих римановы поверхности P и Q. Доказать,* *что $f(P) = Q$. Доказать, что число прообразов $f^{-1}(p)$ конечно для любой точки $p \in P$.*

Свойства голоморфного отображения $f : P \to Q$ в окрестности точки $p \in P$ описываются функцией $f_{\alpha\beta} = w_\beta f z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \bigcap f^{-1}(V_\beta)) \to \mathbb{C}$, где (U_α, z_α) и (V_β, w_β) — локальные карты, содержащие точки p и $f(p) \in Q$ соответственно. Как и всякая голоморфная функция, она представляется в виде ряда $f_{\alpha\beta} = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$, где $a_n \neq 0$. Число n называется *степенью ветвления отображения f в точке p* и обозначается $\deg_p f$.

Задача 2.2. *Доказать, что степень ветвления голоморфного отображения f в точке p не зависит от выбора локальных карт (U_α, z_α) и (V_β, w_β). Более того, локальные карты можно выбрать таким образом, чтобы $f_{\alpha\beta}(z_\alpha) = z^n$.*

Точка $p \in P$ называется *критической точкой* голоморфного отображения f, если $\deg_p f > 1$, то есть $f'_{\alpha\beta}(z_\alpha(p)) = 0$. Точка $q \in Q$ называется *критическим значением* голоморфного отображения f, если прообраз $f^{-1}(q)$ имеет хотя бы одну критическую точку.

Задача 2.3. *Доказать, что голоморфное отображение имеет лишь конечное число критических точек и значений.*

Лемма 2.1. *Пусть $q_1, q_2 \in Q$ — некритические значения голоморфного отображения $f : P \to Q$. Тогда число точек в прообразах $f^{-1}(p)$ и $f^{-1}(q)$ одинаково.*

Доказательство. Рассмотрим связную односвязную область $U \subset Q$, содержащую точки q_1, q_2 и не содержащую критических значений отображения f. Рассмотри компоненты связности $U_1, ..., U_n$ прообраза $f^{-1}(U)$. Если концы p_1, p_2 отрезка $l \subset U_i$ проектируются в общую точку, то отрезок $f(l) \subset U$, а значит и отрезок l, стягиваются в точку и, следовательно, $p_1 = p_2$. Таким образом, все отображения $f : U_i \to U$ являются гомеоморфизмами. Следовательно, число прообразов $f^{-1}(q)$ каждой точки $q \in Q$ равно n.
□

Число прообразов $f^{-1}(q)$ некритического значения $q \in Q$ голоморфного отображения $f : P \to Q$ называется *степенью отображения* и обозначается $\deg f$.

Задача 2.4. *Рассмотрим голоморфное отображение римановых поверхностей $f : P \to Q$. Доказать, что $\deg f$ равно $\sum_{p \in f^{-1}(q)} \deg_p f$ для любой точки $q \in Q$.*

Теорема 2.1. *(Формула Римана-Гурвица) Пусть $f : P \to Q$ — голоморфное отображение римановой поверхности P рода $\tilde{g}$ на риманову поверхность Q рода g с критическими точками $p_1, ..., p_k$. Тогда $\tilde{g} = (\deg f)(g-1) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}((\deg_p f) - 1) + 1$.*

Доказательство. Триангулируем поверхность Q так, чтобы вершины триангуляции включали все критические значения. Пусть эта триангуляция состоит из F граней, E ребер и V вершин. Прообраз этой триангуляции образует триангуляцию поверхности Q. Она состоит из $(\deg f)F$ треугольников, $(\deg f)E$ ребер и $(\deg f)V - \sum_{i=1}^{k}((\deg_{p_i} f) - 1)$ вершин, поскольку каждый треугольник с вершиной $q \in Q$ порождает ровно $(\deg_p f)$ треугольников с вершиной $p \in f^{-1}(q) \in P$. Подсчет эйлеровых характеристик дает $2 - 2g = F - E + V$, $2 - 2\tilde{g} = (\deg f)F - (\deg f)E + (\deg f)V - \sum_{i=1}^{k}((\deg_{p_i} f) - 1)$, откуда $2(\deg f)(1-g) - 2(1-\tilde{g}) = \sum_{i=1}^{k}((\deg_{p_i} f) - 1)$.
□

3. Мероморфные функции и дифференциалы.

Пусть P — риманова поверхность, заданная голоморфным атласом локальных карт $\{(U_\alpha, z_\alpha)|\alpha \in \mathcal{A}\}$. Отображение $f : P \to \overline{\mathbb{C}}$ на сферу Римана $\overline{\mathbb{C}}$ называется *мероморфной функцией*, если оно мероморфно в любой локальной карте атласа, то есть $f|_{U_\alpha}(p) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i(z_\alpha(p))^i$. Если при этом $a_k \neq 0$ и $k < 0$, то точка p называется *полюсом функции* f, а число $-k$ — *порядком полюса.*

Задача 3.1. *Доказать, что отображение римановой поверхности на сферу Римана является мероморфной функцией, если и только если оно является является голоморфным отображением.*

Задача 3.2. *Доказать, что проекции $(x, y) \mapsto x$ и $(x, y) \mapsto y$ являются мероморфными функциями на гиперэллиптической римановой поверхности P_F. Найти полюса этих функций и их порядки.*

Мероморфным дифференциалом на римановой поверхности P называется семейство мероморфных функций на локальных картах $\omega = \{f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}|\alpha \in \mathcal{A}\}$ такое, что $\frac{f_\alpha}{f_\beta} = (z_\beta z_\alpha^{-1})'_{z_\alpha}$ на $U_\alpha \bigcap U_\beta$. Другими словами, мероморфный дифференциал согласованным образом сопоставляет каждой локальной карте (U_α, z_α) мероморфный дифференциал $f_\alpha dz_\alpha$ на сфере Римана. Нетрудно видеть, что мероморфные дифференциалы (как и мероморфные функции) образуют векторное пространство над полем комплексных чисел.

Задача 3.3. *Доказать, что определение мероморфного дифференциала зависит лишь от римановой поверхности. Другими словами, для каждого эквивалентного голоморфного атласа локальных карт $\{(V_\beta, w_\beta)|\beta \in \mathcal{B}\}$ существует однозначно определенный голоморфный дифференциал $h_\alpha dw_\alpha$ такой что $\frac{f_\alpha}{h_\beta} = (w_\beta z_\alpha^{-1})'_{z_\alpha}$ на $U_\alpha \bigcap V_\beta$.*

Если $f_\alpha(p) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i(z_\alpha(p))^i$, $a_k \neq 0$ и $k < 0$, то точка p называется *полюсом мероморфного дифференциала* ω, а число $-k$ — *порядком полюса.* Мероморфный дифференциал без полюсов называется *голоморфным дифференциалом.*

Задача 3.4. *Доказать, что множество полюсов мероморфного дифференциала и их порядки не меняются при замене голоморфного атласа локальных карт на эквивалентный.*

Теорема 3.1. *Пусть P — произвольная Риманова поверхность рода g. Тогда: 1) на P существует не менее g линейно независимых голоморфных дифференциалов; 2) для любой точки $p \in P$ и целого $k > 1$ существует мероморфный дифференциал с единственным полюсом порядка k в точке p; 3) для любой пары точек $p_1 \neq p_2 \in P$ существует мероморфный дифференциал, имеющий в точках p_1 и p_2 полюса первого порядка и не имеющий других полюсов.*

Эта замечательная и очень важная теорема явилась одним из главных достижений математики конца 19 века. В ее доказательстве приняли участие Риман, Вейерштрасс, Пуанкаре, Клейн, Гильберт, Г.Вейль. Мы не будем ее доказывать, поскольку методы, которые при этом используются (вещественный функциональный анализ), не связаны с методами, развиваемыми в этом курсе. Доказательство содержится, например, в книге Д.Ж. Спрингера "Введение в теорию римановых поверхностей".

Задача 3.5. *Доказать, что дифференциал, описанный в пункте 2), представляется в виде* $(\frac{1}{z^k}+\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i)dz$ *для некоторой локальной карты* z *в окрестности точки* p.

Задача 3.6. *Доказать, что формула* $\omega = \frac{g(x)dx}{y}$ *при любом многочлене* $g(x)$ *описывает мероморфный дифференциал на гиперэллиптической римановой поверхности* P_F. *Найти полюса этого дифференциала и их порядки. Проиллюстрировать последнюю теорему на примере гиперэллиптических римановых поверхностей.*

4. Периоды голоморфных дифференциалов.

Согласно нашим определения мероморфный дифференциал ω в каждой локальной карте $z: U \to \mathbb{C} = \{(x+iy)\}$ представляется в виде $\omega = S(x,y)dx + T(x,y)dy$, где $dz = dx + idy$.

Задача 4.1. *Доказать, что* $\omega = S(x,y)dx + T(x,y)dy$ *— это замкнутая дифференциальная 1-форма (т.е* $d\omega = 0$*). В частности, для любого ориентированного отрезка* $l \subset P$ *определен интеграл* $\int_l \omega$, *не меняющийся при постоянных на концах гомотопиях отрезка* l.

Каноническим базисом циклов на поверхности P мы будем называть систему простых замкнутых ориентированных контуров $\{a_i, b_i | i = 1, ..., g\}$, которые пересекаются в одой точке, не имеют других попарных точек пересечения и индексы пересечения равны $(a_i, a_j) = (b_i, b_j) = 0$, $(a_i, b_j) = \delta_{ij}$.

Теорема 4.1. *Пусть* ω, ω' *— замкнутые дифференциальные 1-формы на поверхности* P *и* $\mathfrak{B} = \{a_i, b_i | i = 1, ..., g\} \subset P$ *— канонический базис циклов. Положим* $A_i = \oint_{a_i}\omega$, $B_i = \oint_{b_i}\omega$, $A'_i = \oint_{a_i}\omega'$, $B'_i = \oint_{b_i}\omega'$. *Тогда* $\int\int_P \omega\wedge\omega' = \sum_{i=1}^{g}(A_iB'_i - A'_iB_i)$.

Доказательство. Разрезая поверхность P по циклам $\mathfrak{B}$, получаем $4g$- угольник Γ со сторонами $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, ..., a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1}$. Фиксируем точку $p_0 \in P$ и рассмотрим интегралы $f(p) = \int_{[p_0,p]}\omega$ по путям внутри Γ с началом в p_0 и концом в p . Тогда $d(f\omega) = df \wedge \omega' = \omega\wedge\omega'$ и согласно формуле Стокса $\int\int_P \omega\wedge\omega' = \oint_{\partial\Gamma} f\omega' = \sum_{i=1}^{g}(\oint_{a_i} f\omega' + \oint_{a_i^{-1}} f\omega') + \sum_{i=1}^{g}(\oint_{b_i} f\omega' + \oint_{b_i^{-1}} f\omega')$. С другой стороны, для точек $p_i \in a_i$ и $\tilde{p}_i \in a_i^{-1}$ мы имеем $f(p_i) - f(\tilde{p}_i) = \oint_{\tilde{p}_i}^{p}\omega = -B_i$. Таким образом, $\oint_{a_i} f(p_i)\omega'(p_i) + \oint_{a_i^{-1}}(\tilde{p}_i)f\omega'(\tilde{p}_i) = \oint_{a_i} f(p_i)\omega'(p_i) - \oint_{a_i}(f(p_i) + B_i)\omega'(p_i) = -B_i\oint_{a_i}\omega'(p_i) = -B_iA'_i$. Аналогично $\oint_{b_i} f(p_i)\omega'(p_i) + \oint_{b_i^{-1}}(\tilde{p}_i)f\omega'(\tilde{p}_i) = A_iB'_i$. Таким образом, $\int\int_P \omega\wedge\omega' = \sum_{i=1}^{g}(A_iB'_i - A'_iB_i)$.
$\square$

Следствие 4.1. *Если* $\omega \neq 0$ *— голоморфный дифференциал, то* $\mathfrak{Im}(\sum_{i=1}^{g}(A_i\overline{B}_i)) < 0$. *В частности,* $\omega = 0$, *если* $A_i = 0$ *для всех* i.

Доказательство. Комплексно сопряженный дифференциал. Дифференциал $\bar{\omega} = \bar{f}(\bar{z})d\bar{z}$ тоже замкнут, причем $\bar{A}_i = \int_{a_i}\bar{\omega}$, $\bar{B}_i = \int_{b_i}\bar{\omega}$. Поэтому $\mathfrak{Im}(\sum_{i=1}^{g}(A_i\overline{B}_i)) = -\frac{i}{2}\sum_{i=1}^{g}(A_i\bar{B}_i - \bar{A}_iB_i) = -\frac{i}{2}\int\int_P \omega\wedge\bar{\omega} = -\frac{i}{2}\int\int_P \omega\wedge\bar{\omega} = -\frac{i}{2}\int\int_P |f|^2 dz\wedge d\bar{z} = -\int\int_P |f|^2 dx\wedge dy < 0$.
$\square$

Задача 4.2. *Доказать, что размерность пространства голоморфных дифференциалов на римановой поверхности рода g равна g. Более того, для любого канонического базиса циклов существует единственный набор голоморфных дифференциалов $\{\omega_1, ..., \omega_g\}$ такой что $\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}$.*

Возникающая при этом матрица $B_{ij} = \int_{b_i} \bar{\omega}_j = \delta_{ij}$ называется *матрицей периодов голоморфных дифференциалов* на поверхности P, отвечающей каноническому базису циклов $\{a_i, b_i | i = 1, ..., g\}$.

Задача 4.3. *Доказать, что матрица периодов симметрична и ее мнимая часть отрицательно определена.*

5. Билинейные соотношения Римана.

Согласно нашим определениям в каждой локальной карте $z : U \to \mathbb{C}$, где $z(p) = 0$ мероморфный дифференциал представляется в виде $\omega = f(z)dz = (c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + ...)dz$, где k — произвольное целое число. Рассмотрим маленький контур c вокруг точки p, такой что контур $z(c)$ ориентирован против часовой стрелки. Число $\mathtt{Res}_p \omega = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \omega = c_{-1}$ называется вычетом дифференциала ω в точке p.

Задача 5.1. *Доказать, что мероморфный дифференциал имеет лишь конечное число полюсов и сумма вычетов по всем полюсам равна 0.*

Теорема 5.1. *Пусть ω — голоморфный, а ω' — мероморфный дифференциалы на римановой поверхности P и $\mathfrak{B} = \{a_i, b_i | i = 1, ..., g\} \subset P$ — канонический базис циклов. Положим $A_i = \oint_{a_i} \omega$, $B_i = \oint_{b_i} \omega$, $A'_i = \oint_{a_i} \omega'$, $B'_i = \oint_{b_i} \omega'$. Выберем точку $p_0 \in P - \mathfrak{B}$ и положим $f(p) = \int_{l_p} \omega$, где $l_p \subset P - \mathfrak{B}$ — путь, с началом в p_0 и концом в p. Тогда $\sum_{i=1}^{g} (A_i B'_i - A'_i B_i) = 2\pi i \sum_p \mathtt{Res}_p (f\omega)$.*

Теорема 5.2. *Пусть ω — голоморфный, а ω' — мероморфный дифференциалы на римановой поверхности P и $\mathfrak{B} = \{a_i, b_i | i = 1, ..., g\} \subset P$ — канонический базис циклов. Положим $A_i = \oint_{a_i} \omega$, $B_i = \oint_{b_i} \omega$, $A'_i = \oint_{a_i} \omega'$, $B'_i = \oint_{b_i} \omega'$. Пусть дифференциал ω' имеет единственный полюс и $\omega' = (\frac{1}{z^k} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i)dz$ в некоторой локальной карте $z : U \to \mathbb{C}$. Рассмотрим представление $\omega = (\sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j)dz$ дифференциала ω в этой локальной карте. Тогда $\sum_{i=1}^{g} (A_i B'_i - A'_i B_i) = 2\pi i \frac{c_{n-2}}{n-1}$.*

Теоремы 5.1 и 5.2 называются билинейными соотношения Римана. Их доказательство повторяет (с очевидными модификациями) доказательство теоремы 4.1.

6. Дивизоры.

Конечная формальная линейная комбинация $D = \sum_{i=1}^{k} n_i p_i$ точек римановой поверхности $p_i \in P$ с целыми коэффициентами $n_i \in \mathbb{Z}$ называется *дивизором* на P. Дивизоры образуют модуль над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. *Степень дивизора* $\deg D = \sum_{i=1}^{k} n_i$ образует линейный функционал на этом модуле. Дивизор называется *положительным* (обозначается $D > 0$), если все его коэффициенты n_i положительны. Мы будем также писать $D_1 > D_2$, если $D_1 - D_2 > 0$.

Дивизором мероморфной функции или дифференциала h с множеством нулей $p_1, ..., p_s$ и множеством полюсов $q_1, ..., q_t$ называется дивизор

$(h) = \sum_{i=1}^{s} n_i p_i - \sum_{i=1}^{t} m_i p_i$, где n_i (соответственно m_i) кратность нуля (соответственно полюса) функции или дифференциала h в точке p_i (соответственно q_i).

Задача 6.1. *Доказать, что степень дивизора мероморфной функции равна 0.*

Дивизор мероморфной функции называется также *главным дивизором.* Дивизоры, отличающиеся на главный дивизор называются *линейно эквивалентными.* Дивизоры линейно эквивалентные положительному называются *эффективными.* Дивизоры мероморфных дифференциалов образуют класс линейной эквивалентности $\mathcal{K}$, называемый *каноническим.*

Обозначим через $L(D)$ множество мероморфных функций f таких, что $(f) \geq D$. Положим $r(D) = \mathtt{dim} L(D)$. Обозначим через $\Omega(D)$ множество мероморфных функций f таких, что $(f) \geq D$. Положим $i(D) = \mathtt{dim}\Omega(D)$.

Пример 6.1. *Если $D > 0$, то $L(D) = \emptyset$ и $r(D) = 0$. Если $D = 0$, то $L(D)$ — это постоянные функции, $r(D) = 1$ и $i(D) = g$.*

Теорема 6.1. *Для любого дивизора D выполнено $i(D) = r(D - \mathcal{K})$ и $i(D + (f)) = i(D)$, $r(D + (f)) = r(D)$, где f — мероморфная функция.*

Доказательство. Рассмотрим мероморфный дифференциал ω. Тогда соответствие $\omega' \mapsto \frac{\omega'}{\omega}$ задает изоморфизм между $\Omega(D)$ и $L(D - (\omega))$ откуда $i(D) = r(D - \mathcal{K})$. Соответствие $f' \mapsto f'f$ задает изоморфизм между $L(D)$ и $L(D + (f))$. Таким образом, $i(D + (f)) = i(D)$, откуда $r(D + (f)) = i(D + (f) + \mathcal{K}) = i(D + \mathcal{K}) = r(D)$. □

7. Теорема Римана-Роха.

Теорема Римана-Роха утверждает, что $r(-D) = \deg D + i(D) - g + 1$ для всех дивизоров D. С начала мы докажем несколько ее частных случаев. Мы уже знаем, в частности, что она верна для нулевого дивизора, поскольку $r(0) = 1$ и $i(0) = g$.

Теорема 7.1. *Если $D > 0$, то $r(-D) = \deg D + i(D) - g + 1$.*

Доказательство. Фиксируем на нашей римановой поверхности канонический базис циклов на поверхности $\{a_i, b_i | i = 1, ..., g\}$. Пусть $D = \sum_{k=1}^{m} n_k p_k$, где $n_k > 0$. Согласно теореме 3.1 и задачам 3.5, 4.2 для каждой точки p_k и $j > 1$ существует локальная карта (U, z) и мероморфный дифференциал φ_k^j, имеющий в этой карте вид $\varphi_k^j = (\frac{1}{z^j} + \sum_{s=1}^{\infty} a_s z^s) dz$, не имеющий других полюсов на всей поверхности и такой, что $\oint_{a_i} \varphi_k^j = 0$ для всех i. Положим $B_{kl}^j = \oint_{b_l} \varphi_k^j$. Эти числа образуют матрицу

$$B = \begin{pmatrix} B_{11}^2 B_{11}^3 \dots B_{11}^{n_1+1} B_{21}^2 \dots B_{m1}^{n_m+1} \\ B_{12}^2 B_{12}^3 \dots B_{12}^{n_1+1} B_{22}^2 \dots B_{m2}^{n_m+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ B_{1g}^2 B_{1g}^3 \dots B_{1g}^{n_1+1} B_{2g}^2 \dots B_{mg}^{n_m+1} \end{pmatrix}.$$

Опишем теперь множество $L(-D)$. В выбранных нами локальных картах в окрестностях точек p_k дифференциал функции $f \in L(-D)$ представляется в виде $df = (\sum_{j=-n_k-1}^{\infty} c_j^k z^j) dz$, где $c_{-1}^k = 0$. Дифференциал $\varphi = df - \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^k \varphi_k^j$ голоморфен на всей поверхности и $\oint_{a_i} \varphi = 0$ для всех

i. Таким образом, $df = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^k\varphi_k^j$. Следовательно, $\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^k B_{kl}^j = \oint_{b_l}(\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^k\varphi_k^j) = \oint_{b_l} df = 0$ для $l = 1, ..., g$

Будем рассматривать эти соотношения как систему линейных уравнений с матрицей B на числа c_{-j}^k. Как учит нас линейная алгебра, такая система имеет $\deg D - \rho$ решений, где $\deg D = \sum_{k=1}^{m} n_k$ — число неизвестных, а ρ — ранг матрицы B. С другой стороны, каждому решению системы отвечает непостоянный точный голоморфный дифференциал $\omega = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^k\varphi_k^j$ и, следовательно, определенная с точностью до константы функция $f = \int_{p_0}^{p}\omega \in L(-D)$. Таким образом, $\mathtt{dim}L(-D) = \deg D - \rho + 1$.

Найдем теперь ранг матрицы B. Рассмотрим базис пространства голоморфных дифференциалов $\{\omega_1, ..., \omega_g\}$ такой что $\int_{a_i}\omega_j = \delta_{ij}$. Рассмотрим представления дифференциалов $\omega_l = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{lj}^k z^j$ в выбранных нами локальных картах в окрестностях точек p_k. Тогда, согласно теореме 5.2, $B_{kl}^j = 2\pi i\frac{\alpha_{l(j-2)}^k}{j-1}$, то есть

$$B = \left(\begin{array}{c} \alpha_{11}^2\frac{\alpha_{11}^3}{2}\ldots\frac{\alpha_{11}^{n_1+1}}{n_1}\alpha_{21}^2\ldots\frac{\alpha_{m1}^{n_m+1}}{n_m} \\ \alpha_{12}^2\frac{\alpha_{12}^3}{2}\ldots\frac{\alpha_{12}^{n_1+1}}{n_1}\alpha_{22}^2\ldots\frac{\alpha_{m2}^{n_m+1}}{n_m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1g}^2\frac{\alpha_{1g}^3}{2}\ldots\frac{\alpha_{1g}^{n_1+1}}{n_1}\alpha_{2g}^2\ldots\frac{\alpha_{mg}^{n_m+1}}{n_m} \end{array}\right).$$

Строке с номером i отвечает дифференциал ω_i. Линейная комбинация строк дает нулевую строку, если и только если соответствующая линейная комбинация дифференциалов ω_i принадлежит $\Omega(D)$. Таким образом, $\mathtt{dim}\Omega = g - \rho$. Откуда $r(-D) = \deg D + i(D) - g + 1$.

□

Из этой теоремы и теоремы 6.1. следует

Следствие 7.1. $r(-D) = \deg D + i(D) - g + 1$, *если D — эффективный дивизор.*

Следствие 7.2. *Степень канонического класса $\mathcal{K}$ равна $2g - 2$.*

Доказательство. Если ω — голоморфный дифференциал и $\tilde{\omega} \in \Omega((\omega))$, то $\frac{\tilde{\omega}}{\omega} = \mathtt{const}$. Таким образом, $i(\mathcal{K}) = 1$. Согласно теореме 6.1, отсюда следует $r(-\mathcal{K}) = i(0) = g$. Таким образом, согласно предыдущему следствию, $\deg\mathcal{K} = r(-\mathcal{K}) - i(\mathcal{K}) + g - 1 = 2(g-1)$.

□

Лемма 7.1. $r(-D) = \deg D + i(D) - g + 1$, *если и только если* $r(-D) + \frac{1}{2}\deg(-D) = r(D-\mathcal{K}) + \frac{1}{2}\deg((D-\mathcal{K})$.

Доказательство. Используя предположение леммы, последнее следствие и теорему 6.1, находим $r(-D) + \frac{1}{2}\deg(-D) = \deg D + i(D) - g + 1 + \frac{1}{2}\deg(-D) = \frac{1}{2}\deg(D) + i(D) - \frac{1}{2}\deg(\mathcal{K}) = r(D-\mathcal{K}) + \frac{1}{2}\deg((D-\mathcal{K})$. Обратное утверждение доказывается аналогично.

□

Теорема 7.2. $r(-D) = \deg D + i(D) - g + 1$ *для любого дивизора D.*

Доказательство. Если $r(-D) > 0$, то теорема верна, поскольку $(f) + D > 0$ для $f \in L(-D)$. Ввиду предыдущей леммы теорема верна и в случае $r(D-\mathcal{K}) > 0$. Пусть теперь $r(-D) = 0$, $r(D-\mathcal{K}) = 0$ и $D = D_+ - D_-$, где $D_+, D_- > 0$. Предположим, что

$\deg D \geq g$. Тогда $r(-D) \geq \deg D_+ - g + 1 \geq \deg D + \deg D_- - g + 1 \geq 1 + \deg D_-$. Следовательно, существует функция $f \in L(-D_+)$ с дивизором нулей, содержащим D_-. Таким образом, $f \in L(-D)$, что противоречит условию $r(-D) = 0$. Следовательно, $\deg D < g$. Аналогично, $\deg(\mathcal{K} - D) < g$, откуда $\deg(D) > 2g - 2 - g = g - 2$. Таким образом, $\deg(D) = g - 1$, что (в виду $i(D) = r(D - \mathcal{K}) = 0$) и утверждает теорема Римана-Роха.

$\square$