Общая топология

1.1. Сформулируйте аксиомы топологического пространства, взяв за неопределяемое понятие замкнутое множество (вместо открытого)

1.2. Дайте два разных определения замыкания и докажите их эквивалентность.

1.3. Докажите, что $X \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда X замкнуто и ограничено.

1.4. Докажите, что непрерывный образ компакта — компакт.

1.5. Докажите, что линейная связность сохраняется при непрерывных отображениях.

Гомеоморфизм & гомотопность

1.6. Аккуратно докажите, что эллипсоид гомеоморфен границе куба, но не гомеоморфен однополостному гиперболоиду.

1.7. Аккуратно докажите, что любые два непрерывные отображения любого пространства в куб гомотопны.

1.8. Аккуратно докажите, что любые два непрерывные отображения куба в любое пространство гомотопны.

1.9. Какой двумерной поверхности гомотопически эквивалентно евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ с двумя выколотыми точками?

1.10. Докажите, что $\mathbb{R}^3$ с выброшенной окружностью гомотопически эквивалентно окружности.

Степень, фундаментальная группа, накрытия

1.11. Какие значения принимает степень точек $\mathbb{R}^2 \setminus C$ относительно кривой C?

1.12. Найдите фундаментальную группу букета двух окружностей и тора.

1.13. Найдите фундаментальную группу тора с выброшенной точкой.

1.14. Можно ли проективную плоскость накрыть сферой S^2, плоскостью $\mathbb{R}^2$, бутылкой Клейна?

1.15. Сформулируйте теорему о накрывающей гомотопии и докажите, что индуцированное отображение фундаментальных групп при накрытии — мономорфизм.