Топологические конструкции

2.1. Докажите, что $D^n/\partial D^n \approx S^n$.

2.2. Докажите, что пространство $S^1 \times S^1$ гомеоморфно пространству, полученному из квадрата $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ при помощи отождествления точек, лежащих на его сторонах: $(x, 0) \sim (x, 1)$ и $(0, y) \sim (1, y)$. (Это пространство называется *тор*).

2.3. Пусть $I = [0, 1]$. Докажите, что пространство $S^1 \times I$ не гомеоморфно ленте Мёбиуса.

2.4. Докажите, что следующие пространства гомеоморфны:

а) Множество прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат;

б) Множество гиперплоскостей в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат;

в) Сфера S^n с отождествлёнными диаметрально противоположными точками;

г) Диск D^n с отождествлёнными диаметрально противоположными точками сферы $S^{n-1} = \partial D^n$, которая является его границей.

2.5. Докажите, что следующие пространства гомеоморфны:

а) Множество комплексных прямых в $\mathbb{C}^{n+1}$, проходящих через начало координат;

б) Сфера $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, у которой отождествлены точки вида λx, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, для всех $x \in S^{2n+1}$.

2.6. Докажите, что $CD^n \approx D^{n+1}$ и $\Sigma D^n \approx D^{n+1}$.

2.7. Докажите, что $\mathbb{R}P^1 \approx S^1$ и $\mathbb{C}P^1 \approx S^2$.

2.8. Докажите, что $CS^n \approx D^{n+1}$ и $\Sigma S^n \approx S^{n+1}$.

2.9. Верны ли для произвольных CW-комплексов равенства: **а)** $X * Y \approx Y * X$; **б)** $(X * Y) * Z \approx X * (Y * Z)$; **в)** $C(X * Y) \approx CX * Y$; **г)** $\Sigma(X * Y) \approx \Sigma X * Y$?

2.10. Докажите, что $S^n * S^m \approx S^{n+m+1}$.

2.11. Докажите, что $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k \approx S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$.

2.12. Докажите, что $S^{n+m-1} \setminus S^{n-1} \approx \mathbb{R}^n \times S^{m-1}$. (Мы предполагаем, что S^{n-1} вложена в S^{n+m-1} стандартным образом).

2.13. Пусть $S^p \vee S^q = (S^p \times \{*\}) \cup (\{*\} \times S^q) \subset S^p \times S^q$. Докажите, что $(S^p \times S^q)/(S^p \vee S^q) \approx S^{p+q}$.

CW-комплексы

2.14. Докажите, что сфера S^2 является CW-комплексом.

2.15. Докажите, что тор T^2 является CW-комплексом.

2.16. Докажите, что сфера S^n является CW-комплексом.

2.17. Докажите, что вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ является CW-комплексом.

2.18. Докажите, что комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ является CW-комплексом.

2.19. **а)** Приведите пример комплекса, для которого выполняется аксиома (W), но не выполняется аксиома (C).

б) Предположим, что для некоторого комплекса выполнена аксиома (C). Верно ли, что для него также выполняется аксиома (W)?