Примеры поверхностей

3.1. Приклеивание к поверхности ручки равносильно приклеиванию цилиндра в форме подковы.

3.2. Приклеивание к поверхности бутылки Клейна равносильно приклеиванию цилиндра «с перекручиванием».

3.3. Проективная плоскость есть то же самое, что

а) лист Мёбиуса с приклеенным к нему диском;

б) сфера S^2 с отождествлёнными диаметрально противоположными точками;

в) диск D^2 с отождествлёнными диаметрально противоположными точками границы.

3.4. Бутылка Клейна есть то же самое, что

а) два листа Мёбиуса, склееные по краю;

б) сфера S^2 с двумя дырками, в которые вклеены листы Мёбиуса;

в) связная сумма двух проективных плоскостей.

3.5. **а)** Рассмотрим пространство прямых на плоскости. Докажите, что оно гомеоморфно листу Мёбиуса без границы.

б) Рассмотрим пространство *ориентированных* прямых на плоскости. Докажите, что оно гомеоморфно цилиндру без границы.

3.6. Покажите, что проколотую велосипедную камеру можно вывернуть наизнанку.

3.7 (Теорема Шёнфлиса, вариант для многоугольников). Замкнутая ломаная на плоскости ограничивает область, замыкание которой есть диск D^2.

3.8 (Теорема о кольце, вариант для многоугольников). Две замкнутых ломаных, одна из которых находится внутри другой, ограничивают область, замыкание которой есть кольцо $S^1 \times [0,1]$.

Обозначим через $M_1 \# M_2$ поверхность, полученную из поверхностей M_1 и M_2 при помощи следующей операции: вырежем по открытому симплексу из M_1 и M_2 и склеим соответственные точки границ симплексов. Эта операция называется *связной суммой*. Обозначим связную сумму n торов через nT^2, а связную сумму m проективных поверхностей $\mathbb{R}P^2$ через $m\mathbb{R}P^2$. (Эти обозначения не являются стандартными).

3.9. **а)** Две поверхности с дырками, полученные из одной и той же замкнутой триангулируемой поверхности в результате вырезания двух различных открытых двумерных симплексов, гомеоморфны.

б) Покажите, что операция взятия связной суммы двух поверхностей определена корректно.

3.10. Докажите, что $T^2 \# \mathbb{R}P^2 \approx 3\mathbb{R}P^2$.

3.11. **а)** Докажите, что $\mathrm{Kl} \# \mathrm{Kl}$ гомеоморфна бутылке Клейна, к которой приклеена ручка.

б) Докажите, что $\mathbb{R}P^2 \# \mathrm{Kl}$ гомеоморфна проективной плоскости, к которой приклеена ручка.

3.12. Докажите, что если поверхность M_1 неориентируема, то для любой другой поверхности M_2 их связная сумма $M_1 \# M_2$ неориентируема.

3.13. Сколько различных поверхностей можно получить, если попарно склеивать стороны

а) квадрата; **б)** шестиугольника; **в)** восьмиугольника?