Поверхности

4.1. Докажите, что $\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$.

4.2. Докажите, что $\chi(mT^2) = 2 - 2m$ и $\chi(n\mathbb{R}P^2) = 2 - n$.

4.3. Докажите, что замкнутая ориентируемая поверхность не гомеоморфна никакой замкнутой неориентируемой поверхности.

4.4. Докажите, что эйлеровы характеристики двух гомеоморфных замкнутых поверхностей равны. (*Подсказка*: рассмотрите две разных триангуляции поверхности и «немного пошевелите» одну из них, чтобы она была трансверсальна другой триангуляции).

4.5. Последовательно приклеивая к «чашечке» (горизонтальному диску) «штаны» так, чтобы поверхность оставалась бы ориентируемой, и потом заклеивая все дырки «шапочками», мы получим либо сферу S^2, либо поверхность вида mT^2, $m = 1, 2, \ldots$.

4.6. **а)** Докажите, что каждый граф обладает максимальным поддеревом.
б) Докажите, что симплициальная окрестность дерева гомеоморфна диску.

4.7. Найдите $\chi(\mathrm{Kl})$.

4.8. Пусть M_1 и M_2 — две гомеоморфных поверхности. Докажите, что $\chi(M_1) = \chi(M_2)$.

4.9. Определите тип поверхности, изображённой на рисунке, при:
а) $n = 3$; **б)** произвольном $n \geq 2$.

4.10. **а*)** Докажите, что всякая замкнутая неориентируемая поверхность гомеоморфна одной из поверхностей из списка:

$\mathbb{R}P^2$	(проективная плоскость)
$\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$	(бутылка Клейна)
$\ldots$	
$\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \ldots \# \mathbb{R}P^2$,	
$\ldots$	

б) Любые две поверхности в этом списке не гомеоморфны.

4.11. Рассмотрим факторпространство $(S^1 \times S^1)/(x, y) \cong (y, x)$. Это поверхность. Какая именно?

4.12. Докажите, что поверхность на рисунке гомеоморфна тору с выброшенным диском.

4.13. Докажите, что лента Мёбиуса может быть гомеоморфно продеформирована в трёхмерном пространстве так, чтобы её граница являлась бы окружностью, лежащей в некоторой плоскости.

4.14. Докажите, что граница $\mathrm{Mb}^2 \times I$ — это бутылка Клейна.

4.15. Докажите, что максимальное количество непересекающихся замкнутых кривых, которое можно провести на сфере с g ручками так, чтобы она не распалась на части, равняется g.