Гомотопии

5.1. а) Докажите, что если отображение $f\colon X \to S^1$ не сюръективно (то есть его образ не есть вся окружность), то f гомотопно отображению в точку.

б) Верно ли аналогичное утверждение для отображения $f\colon X \to S^n$ в сферу произвольной размерности?

5.2. Докажите, что проколотая сфера с g ручками гомотопически эквивалентна букету n окружностей, и найдите n.

5.3. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

а) У всякого непрерывного отображения $f\colon D^n \to D^n$ есть неподвижная точка;

б) Не существует ретракта $r\colon D^n \to S^{n-1}$ с диска на его границу;

в) Пусть $v(x)$ — непрерывное векторное поле на диске, и $v(x) = x$ при $x \in S^{n-1}$. Тогда $v(x) = 0$ в некоторой точке $x \in D^n$.

5.4. Пусть S^∞ — множество последовательностей $(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$, у которых только конечное число координат отлично от 0, и $\sum x_i^2 = 1$. Оно является метрическим пространством, значит, на нём имеется естественная топология. Докажите, что пространство S^∞ стягиваемо.

Указание. Докажите, что тождественное отображение гомотопно отображению $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$

Векторные поля на плоскости

5.5. Рассмотрим векторное поле на комплексной плоскости, заданное условием $v(z) = \frac{z^n}{|z|^{n-1}}$ при $z \neq 0$, $v(0) = 0$. Найдите все особые точки этого векторного поля и их индексы.

5.6. Докажите, что индекс кривой γ равен сумме индексов особых точек, находящихся внутри неё.

5.7. а) Предположим, что два векторных поля v и w, заданные на замкнутой несамопересекающейся кривой, таковы, что для всякой точки X векторы $v(X)$ и $w(X)$ не являются противоположно направленными. Докажите, что индексы кривой γ относительно этих векторных полей равны.

б) (Теорема о даме с собачкой) Пусть два векторных поля v и u, заданные на кривой γ таковы, что $|v(X)| > |w(X)|$ в любой точке $X \in \gamma$. Тогда индексы кривой γ относительно полей v и $v + u$ равны.

5.8 (Основная теорема алгебры). Докажите, что всякий многочлен с комплексными коэффициентами, отличный от константы, имеет комплексный корень.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

5.9. Назовём векторное поле v *чётным*, если $v(x) = v(-x)$ при всех x, и *нечётным*, если $v(x) = -v(-x)$. Докажите, что индекс точки 0 для нечётного поля нечётен, а для чётного — чётен.

5.10. Рассмотрим векторное поле, заданное на границе кольца $\{1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\}$ следующими двумя условиями: вектор в каждой точке касается окружности с центром в начале координат, и векторы в соответственных точках большой и малой окружности противоположно направлены. Продолжите это векторное поле на внутренность кольца так, чтобы оно не имело бы особых точек.

5.11. Докажите, что векторное поле, заданное на границе кольца, может быть продолжено до векторного поля внутри всего кольца, если и только если индексы обеих окружностей, образующих границу кольца, совпадают.

5.12. Пусть f — гладкая функция на плоскости. Докажите, что индекс изолированной особой точки векторного поля $v = \mathrm{grad} f$

а) может равняться $1,\ 0,\ -1,\ -2, \dots;$

б*) не может равняться никакому другому целому числу.