Векторные поля на поверхностях

6.1. Постройте векторное поле без особых точек
- **а)** на торе;
- **б)** на бутылке Клейна.

6.2. Постройте векторное поле с одной особой точкой
- **а)** на сфере;
- **б)** на проективной плоскости;
- **в)** на кренделе;
- **г*)** на произвольной замкнутой поверхности без края.

6.3. Постройте на сфере с g ручками ($g \geq 2$) векторное поле, все особые точки которого имеют тип "седло". Сколько будет этих особых точек?

6.4. Докажите, что теорема Пуанкаре остаётся верной для поверхности с краем, если в каждой точке края вектор направлен по касательной к краю.

6.5. Каждой точке X сферы $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ сопоставили ненулевой вектор $v(X)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$. Вектор непрерывно зависит от точки сферы, но не обязательно касается сферы. Докажите, что хотя бы один из векторов $v(X)$ перпендикулярен касательной плоскости к сфере в точке X.

6.6. Пусть $f\colon S^2 \to S^2$ — непрерывное отображение. Докажите, что найдётся такая точка $x \in S^2$, для которой $f(x) = \pm x$.

6.7. На столе лежит карта Москвы в масштабе $1 : 50\,000$. На неё положили карту Москвы в масштабе $1 : 100\,000$, так, что меньшая карта лежит целиком внутри большей. Докажите, что, как бы ни лежала меньшая карта, обе карты можно проткнуть иглой так, чтобы след от иглы соответствовал бы одной и той же точке на местности.