Теорема Уитни

7.1. Докажите, что изображённая на рис. 1 кривая регулярно гомотопна окружности.

7.2. Докажите, что две изображённые на рис. 2 кривые регулярно гомотопны (в рамке нарисован произвольный кусок кривой, один и тот же на обоих рисунках).

Простая петля ω — это часть иммерсированной кривой γ, для которой выполнены два условия:

(1) ω начинается и заканчивается в одной точке, которая является двойной точкой кривой γ;

(2) ω не имеет самопересечений (хотя может пересекаться с другими частями кривой γ).

Рис. 1.

7.3. Докажите, что у вложенной кривой с самопересечениями имеется хотя бы одна простая петля.

7.4. Докажите, что всякая простая петля ω кривой γ может быть посредством регулярной гомотопии продеформирована в простую петлю ω', не пересекающую γ.

7.5. Докажите теорему Уитни для плоскости.

7.6. Докажите теорему Уитни для сферы.

Инварианты Арнольда

Рис. 2.

7.7. Нарисуйте исчезающие треугольники при $q = 0, 1, 2, 3$. Покажите, что в результате прохождения через тройную точку исчезающий треугольник превращается в треугольник с противоположным знаком.

7.8. Две кривые называются *гладко изотопными*, если существует диффеоморфизм плоскости $\mathbb{R}^2$, переводящий одну кривую в другую. Нарисуйте все неизотопные кривые с **а)** одной двойной точкой; **б)** двумя двойными точками.

7.9. Вычислите индексы Уитни для кривых из предыдущей задачи.

7.10. Вычислите три инварианта Арнольда для следующих кривых:

7.11. Вычислите наименьшее число **а)** типичных перестроек; **б)** сонаправленных самокасаний; **в)** противоположно направленных самокасаний; **г)** перестроек с тройной точкой, которые могут возникнуть при регулярной гомотопии, переводящей одну из кривых на рис. 1 во вторую.

7.12. Ответьте на тот же вопрос для следующих пар кривых: